Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Polynésie Remplacement – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Données de l'énoncé :

$P(A) = 0{,}16$

$P(R \mid A) = 0{,}747$

$P(R \mid \overline{A}) = 0{,}568$

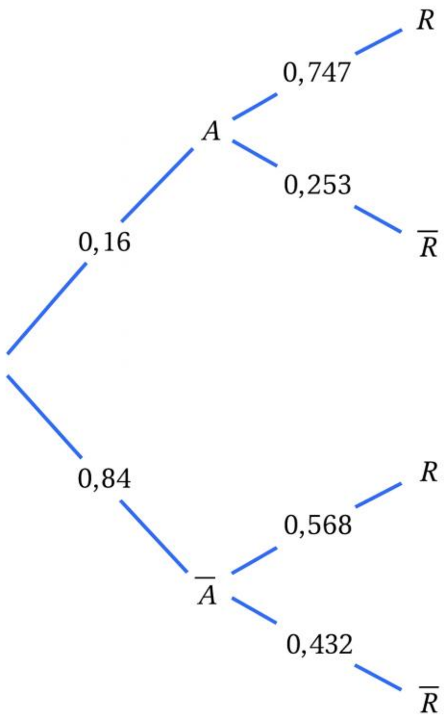
Partie A

1. On calculs les probabilités manquantes et on dessine l'arbre :

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$$

$$P(\overline{R} \mid A) = 1 - 0{,}747 = 0{,}253$$

$$P(\overline{R} \mid \overline{A}) = 1 - 0{,}568 = 0{,}432$$



2.a. On applique la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R)$$

$$= P(A)\, P(\,R \mid A\,) + P(\overline{A})\, P(\mathrm{R} \mid \overline{A})$$

$$= 0{,}16 \times 0{,}747 + 0{,}84 \times 0{,}568 = 0{,}59664$$

2.b. En pourcentage : $0{,}597 = 59{,}7\,\%$.

Interprétation : Environ 6 jeunes sur 10 obtiennent le permis du premier coup, toutes formations confondues.

3.

$$P(\,A \mid R\,) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}16 \times 0{,}747}{0{,}59664} \approx 0{,}200$$

Donc parmi les reçus du premier coup, environ 20 % ont suivi la conduite accompagnée.

4. On cherche $x = P(A)$ pour que le taux global dépasse 70 % :

$$P(R) = 0{,}747x + 0{,}568(1 - x) = 0{,}568 + 0{,}179x > 0{,}70$$

$$x > \frac{0{,}70 - 0{,}568}{0{,}179} \approx 0{,}737$$

Il faudrait donc plus de 73,7 % de jeunes en conduite accompagnée pour dépasser 70 % de réussite globale dès la première tentative.

<u>**Partie B**</u>

1. On répète 10 épreuves identiques et indépendantes, deux issues, même probabilité p.

$$X \sim \mathcal{B}(10,\ 0{,}747)$$

2. $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0{,}918$

Donc il y a environ 91,8% de chances qu'au moins 6 sur 10 réussissent du premier coup.

3. $E(X) = np = 10 \times 0{,}747 = 7{,}47$

$V(X) = np(1 - p) = 10 \times 0{,}747 \times 0{,}253 \approx 1{,}890$

4.a. On pose $Z = X + Y$. Alors :

$E(Z) = E(X) + E(Y) = 7{,}47 + 22{,}53 = 30$ *(linéarité de l'espérance)*

$V(Z) = V(X) + V(Y) \approx 1{,}88991 + 9{,}81 \approx 11{,}700$ *(indépendance)*

4.b. « Moins de 20 ou plus de 40 reçus » équivaut à $|Z - 30| \geq 10$.

Par Bienaymé–Tchebychev :

$$P(|Z - 30| \geq 10) \leq \frac{V(Z)}{10^2} \approx \frac{11{,}700}{100} \approx 0{,}117 < 0{,}12$$

La probabilité demandée est donc inférieure à 0,12, comme requis.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A — Modèle 1

On suppose que y vérifie $y' = 0{,}05\,y - 0{,}5$ et $y(0) = 50$.

1. Résolution de (E_1)

Équation linéaire : $y' - 0{,}05\,y = -0{,}5$

Solution de l'homogène : $y_h(x) = C\,e^{0{,}05x}$

Recherche d'une solution particulière constante $y_p = k$:

$$-0{,}05k = -0{,}5 \Rightarrow k = 10$$

Donc $y(x) = 10 + C\,e^{0{,}05x}$.

Avec $y(0) = 50$, on obtient $C = 40$.

$$y(x) = 10 + 40\,e^{0{,}05x}$$

2. Prévisions du modèle :

$y(5) = 10 + 40e^{0{,}25} \approx 61$

$y(10) = 10 + 40e^{0{,}5} \approx 76$

$y(15) = 10 + 40e^{0{,}75} \approx 95$

Confrontation au tableau :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100
x	0	5	10	15
$y(x)$	50	61	76	95

Le modèle 1 sous-estime légèrement les effectifs aux dates mesurées tout en reproduisant une croissance soutenue.

Partie B — Modèle 2

On considère (E_2) : $y' = 0{,}05\,y(1 - 0{,}00125\,y)$

On pose :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0{,}05x}}$$

et l'on dispose des résultats du tableau logiciel (expressions de f, f' et f'').

1. On a :

$$f(0)=\frac{800}{1+15e^{0}}=\frac{800}{16}=50$$

Par ailleurs, en dérivant f, on obtient d'après le tableau du logiciel :

$$f'(x)=\frac{600\,e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2}$$

Or :

$$f(x)=\frac{800}{1+15e^{-0,05x}}\Rightarrow\frac{f(x)}{800}=\frac{1}{1+15e^{-0,05x}}\Rightarrow 1-\frac{f(x)}{800}=\frac{15e^{-0,05x}}{1+15e^{-0,05x}}$$

En multipliant ces deux expressions, on obtient :

$$\frac{f(x)}{800}\left(1-\frac{f(x)}{800}\right)=\frac{1}{1+15e^{-0,05x}}\cdot\frac{15e^{-0,05x}}{1+15e^{-0,05x}}=\frac{15e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2}$$

En multipliant par $800\cdot 0,05=40$, il vient :

$$0,05\,f(x)\left(1-\frac{f(x)}{800}\right)=\frac{600\,e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2}$$

Le membre de droite est exactement $f'(x)$, donc :

$$f'(x)=0,05\,f(x)\left(1-\frac{f(x)}{800}\right)$$

Enfin, comme $\frac{1}{800}=0,00125$, alors :

$$f'(x)=0,05\,f(x)(1-0,00125\,f(x))$$

2. On prend $x=50$ (années écoulées depuis 2000) :

$$f(50)=\frac{800}{1+15e^{-2,5}}\approx\frac{800}{1+15\times 0,082085}\approx 358,5$$

Il y aurait donc 359 individus (à l'unité près) en 2050 d'après ce modèle.

3. On calcule la limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{800}{1+0}=800$$

La courbe C admet donc l'asymptote horizontale $y=800$.

Interprétation : la population se stabilise à une capacité limite d'environ 800 individus.

4. D'après l'expression de $f'(x) = \frac{600\, e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2}$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs (rappel : la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$), donc $f'(x) > 0$ pour tout x.

Ainsi f est croissante sur $[0, +\infty[$.

5. On résout l'inéquation :

$$15e^{-0,05x} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 15e^{-0,05x} \geq 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-0,05x} \geq \frac{1}{15} \;\Leftrightarrow\; -0,05x \geq -\ln 15 \;\Leftrightarrow\; x \leq 20\ln 15$$

Cela confirme le résultat de la ligne 4.

6.a. Le logiciel donne :

$$f''(x) = \frac{30\, e^{-0,05x}(15e^{-0,05x} - 1)}{(1 + 15e^{-0,05x})^3}$$

Le signe de f'' est celui de $15e^{-0,05x} - 1$. Ainsi :

- $f''(x) > 0$ si $x < 20\ln 15$: f est convexe sur $[0\,;\, 20\ln 15[$.
- $f''(x) = 0$ pour $x_0 = 20\ln 15$: point d'inflexion.
- $f''(x) < 0$ si $x > 20\ln 15$: f est concave sur $]20\ln 15\,;\, +\infty[$.

En outre, $e^{-0,05x_0} = 1/15$, donc $f(x_0) = \frac{800}{1+15\times 1/15} = 400$.
L'unique point d'inflexion est donc le point de coordonnées $(20\ln 15\,;\;400)$.

6.b. La vitesse de croissance est f'.

Or $f'' > 0$ pour $x < 20\ln 15$ puis $f'' < 0$ au-delà.

Donc f' augmente jusqu'à $x = 20\ln 15$ puis diminue ensuite.

Numériquement, $20\ln 15 \approx 54{,}16$ années après 2000, soit un peu plus de 50 ans.
L'affirmation de la direction est donc juste.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Script complété :

```
from math import log
def suite(k):
   L = []
   u = 5
   for i in range(k):
      L.append(u)
      u = 2 + log(u**2 - 3)
   return L
```

2. Conjectures :

- la suite semble croissante.
- la suite semble convergente vers une valeur proche de $5{,}164$.

3. La fonction « mystere » renvoie « 1 » si la suite est croissante, et « 0 » s'il existe au moins un rang i pour lequel $L[i] > L[i+1]$.

mystere(10000) renvoie 1 : aucune baisse n'a été détectée sur les 10 000 premières valeurs, ce qui ne contredit pas la conjecture de croissance (au contraire, il l'appuie).

Partie B : Étude de la convergence de (u_n)

1.

$$g'(x) = 0 + \frac{2x}{x^2 - 3} = \frac{2x}{x^2 - 3}$$

Sur $[2, +\infty[$, on a $x > 0$ et $x^2 - 3 > 0$, donc $g'(x) > 0$ et g est croissante sur $[2\,; +\infty[$.

2.a. Raisonnement par récurrence pour démontrer la propriété $P(n)$:

$$4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$$

Initialisation : $u_0 = 5 \in [4; 6]$

$u_1 = g(u_0) = 2 + \ln(5^2 + 3) = 2 + \ln(22) \approx 5{,}09 \in [4; 6]$

De plus, on a bien $u_1 \geq u_0$.

Donc P est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie rang n : $4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

Comme g est croissante sur $[2, +\infty[$, on a :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = g(u_{n+1}) - g(u_n) \geq 0$$

Donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$.

En outre, $4 \leq u_{n+1} \leq 6$ implique $4 \leq g(4) \leq g(u_{n+1}) \leq g(6) \leq 6$.

Soit $4 \leq u_{n+2} \leq 6$.

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.b. (u_n) est croissante et majorée par 6, donc convergente (théorème de convergence monotone).

Partie C : Étude de la valeur de la limite

1.a. D'après le tableau de variations, on voit une première solution à $f(2) = 0$. Donc $\alpha = 2$.

Par ailleurs :

- f est continue sur $[3\,; +\infty[$
- $f(3) = \ln(6) - 1 \approx 0{,}79 > 0$
- $\lim\limits_{+\infty} f(x) = -\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une seconde solution β sur l'intervalle $[3\,;\ +\infty[$.

1.b. On a vu que $\alpha = 2$.

L'autre solution est trouvable avec la calculatrice : $\beta \approx 5{,}164$.

2. Si $\ell = \lim u_n$, par passage à la limite dans $u_{n+1} = g(u_n)$ (continuité de g), on a alors :

$$\ell = g(\ell) \quad \Leftrightarrow \quad f(\ell) = 0$$

Or $(u_n) \in [4{,}6]$ et, sur cet intervalle, l'unique zéro de f est β. Donc :

$$\ell = \beta \approx 5{,}164$$

La suite (u_n) converge vers la seconde solution de $f(x) = 0$ sur $[2, +\infty[$.

EXERCICE 4 (5 points)

1. On a $f(x) = x\ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Intégration par parties avec $u = \ln x$ et $v' = x$, donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2}\cdot 1 - \frac{e^2}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

<u>**Affirmation 1 : Vraie**</u>

2. Pour n et k entiers naturels non nuls avec $k \leq n$:

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = k\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = k\binom{n}{k}$$

<u>**Affirmation 2 : Vraie**</u>

3. La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases}$$

Pour le point $A(-1;\ -3;\ 2)$, l'égalité $x = -1$ donne $t = -2$.

Alors $y = 2(-2) + 1 = -3$ et $z = -(-2) = 2$, ce qui est cohérent. Donc $A \in d$.

<u>**Affirmation 3 : Vraie**</u>

4. Cherchons une intersection entre la droite d et la droite d' :

$$(1) : t + 1 = 2t' - 1 \Rightarrow t = 2t' - 2$$

$$(2) : 2t + 1 = -t' + 2$$

$$(3) : \ -t = t' + 1$$

En remplaçant $t = 2t' - 2$ dans (2) : $4t' - 4 + 1 = -t' + 2 \Rightarrow 5t' = 5 \Rightarrow t' = 1$.

On reporte $t' = 1$ dans (1) : $t = 2\cdot 1 - 2 = 0$.

(3) impose alors $-0 = 1 + 1$, ce qui est impossible. Donc les droites d et d' ne se coupent pas.

<u>**Affirmation 4 : Fausse**</u>

5. Plan $P: 2x + y - 2z + 18 = 0$.

Points $A(-1; -3; 2)$ et $B(-5; -5; 6)$.

Vecteur $\overrightarrow{AB} = (-4; -2; 4) = -2\,(2; 1; -2)$.

Le vecteur normal de P est $n = (2; 1; -2)$, donc $P \perp (AB)$.

Milieu $M\left(\frac{-1-5}{2}; \frac{-3-5}{2}; \frac{2+6}{2}\right) = (-3; -4; 4)$.

Vérification : $2 \cdot (-3) + (-4) - 2 \cdot 4 + 18 = -6 - 4 - 8 + 18 = 0$, donc $M \in P$.

Ainsi P est orthogonal à (AB) et passe par le milieu de $[AB]$: c'est le plan médiateur de $[AB]$.

<u>Affirmation 5 : Vraie</u>

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/