CORRIGE BAC

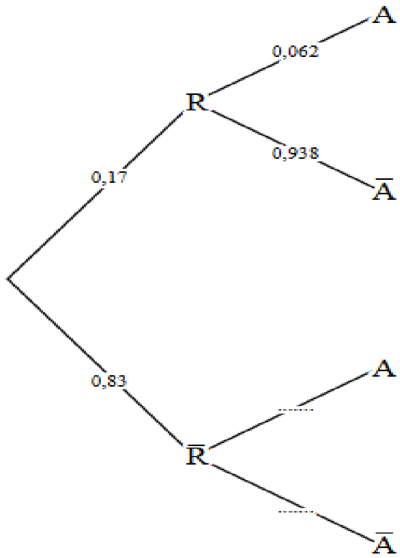
Année : 2025 **Matière :** Spé maths **Sujet :** Polynésie 1

Exercice 1 :

Partie A :

1.

D'après l'énoncé, $P(R) = 0{,}17$ et $P(\bar{R}) = 0{,}83$. De plus, $P_R(A) = 0{,}062$.
Ainsi, $P_R(\bar{A}) = 1 - P_R(A) = 1 - 0{,}062$. $P_R(\bar{A}) = 0{,}938$.



2.

a.

On cherche $P(R \cap A)$.
$P(R \cap A) = P(R)P_R(A)$.
Donc, $P(R \cap A) = 0{,}17 \times 0{,}062 = 0{,}01054$.
La probabilité pour que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'une allergie alimentaire est de 0,01054.

b.

On cherche $P(\bar{R} \cap A)$.
$P(A) = P(R \cap A) + P(\bar{R} \cap A)$.
Donc, $P(\bar{R} \cap A) = P(A) - P(R \cap A)$.
D'après l'énoncé, $P(A) = 0{,}09$ (donnée en partie B, *a priori* c'est une erreur d'énoncé).
Donc, $P(\bar{R} \cap A) = 0{,}09 - 0{,}01054$. $P(\bar{R} \cap A) = 0{,}07946$.
La probabilité pour que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'une allergie alimentaire est de 0,07946.

c.

On cherche $P_{\bar{R}}(A)$.
$P_{\bar{R}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{R})}{P(\bar{R})}$ $P_{\bar{R}}(A) = \frac{0{,}07946}{0{,}83}$. Donc, $P_{\bar{R}}(A) \approx 0{,}0957$.
Ainsi, la probabilité pour qu'un enfant qui habite en zone urbaine soit atteint d'une allergie alimentaire est d'environ 0,0957.

Partie B :

1.

Choisir un enfant est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « l'enfant est atteint d'une allergie alimentaire » de probabilité 0,09.
On répète 100 fois cette épreuve de façon identique et indépendante. On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}09$.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (le nombre d'enfants atteints d'une allergie alimentaire) suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(100 ; 0{,}09)$.

2.

On cherche $P(X \geq 10)$.
$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9)$ car X est à valeurs entières.
D'après la calculatrice, $P(X \leq 9) \approx 0{,}8575$.
Donc, $P(X \geq 10) \approx 1 - 0{,}8575$. $P(X \geq 10) \approx 0{,}1425$.
La probabilité pour qu'au moins 10 enfants soient atteints d'une allergie alimentaire est d'environ 0,1425.

Partie C :

1.

La variable aléatoire M_{20} représente l'âge moyenne d'apparition des premiers symptômes allergiques chez les 20 enfants.

2.

$E(M_{20}) = E\left(\frac{A_1+\cdots+A_{20}}{20}\right) = \frac{1}{20}\left(E(A_1)+\cdots+E(A_{20})\right)$ par linéarité de l'espérance.
Or, $A_1, \dots, A_{20}$ ont même espérance donc $E(A_1) = \cdots = E(A_{20})$.
Ainsi, $E(M_{20}) = \frac{1}{20}\left(E(A_1)+\cdots+E(A_1)\right) = \frac{1}{20} \times 20E(A_1) = E(A_1)$.
Ainsi, $E(M_{20}) = 4$.

$V(M_{20}) = V\left(\frac{A_1+\cdots+A_{20}}{20}\right) = \frac{1}{20^2}V(A_1+\cdots+A_{20}) = \frac{1}{20^2}\left(V(A_1)+\cdots+V(A_{20})\right)$ car les variables $A_1, \dots, A_{20}$ sont indépendantes.
Or, $A_1, \dots, A_{20}$ ont même espérance donc $V(A_1) = \cdots = V(A_{20})$.
Ainsi, $V(M_{20}) = \frac{1}{20^2}\left(V(A_1)+\cdots+V(A_1)\right) = \frac{1}{20^2} \times 20V(A_1) = \frac{V(A_1)}{20}$.
Donc, $V(M_{20}) = \frac{2{,}25}{20}$. Donc, $V(M_{20}) = 0{,}1125$.

3.

$P(2 < M_{20} < 6) = P(-2 < M_{20} - 4 < 2) = P(|M_{20} - 4| < 2)$.
Or, $E(M_{20}) = 4$ donc $P(2 < M_{20} < 6) = P(|M_{20} - E(M_{20})| < 2) = 1 - P(|M_{20} - E(M_{20})| \geq 2)$.
Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|M_{20} - E(M_{20})| \geq 2) \leq \frac{V(M_{20})}{2^2}$.
Donc, $P(2 < M_{20} < 6) \geq 1 - \frac{V(M_{20})}{2^2}$ car la fonction $x \mapsto 1 - x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ (fonction affine de coefficient directeur -1<0).
$1 - \frac{V(M_{20})}{2^2} = 1 - \frac{0{,}1125}{4} = 0{,}971875 > 0{,}97$.
Ainsi, $P(2 < M_{20} < 6) > 0{,}97$.
Ainsi, la probabilité pour que l'âge moyen d'apparition des symptômes allergiques chez les 20 enfants soit strictement compris entre 2 ans et 6 ans est strictement supérieure à 0,97**.**

Exercice 2 :

1.

On cherche $S(x\,;y\,;z)$ tel que S appartienne à la droite d_B (l'avion garde la même trajectoire) et tel que S appartienne au plan P_0 d'équation $z = 0$.
On peut déjà dire que $z = 0$.

On cherche $x\,;y\,;t$ tels que $\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -5 + t \\ 0 = 11 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = -\frac{9}{4} \\ t = \frac{11}{4} \end{cases}$.

Ainsi, l'avion Beta touchera le sol au point $S\left(\frac{11}{4}\,;\,-\frac{9}{4}\,;0\right)$.

2.

a.

La droite d_A a pour vecteur directeur $\vec{u} = (2\,;\,-1\,;\,-3)$ et passe par le point $A(-7\,;1\,;7)$.

Ainsi, une représentation paramétrique de la droite d_A est $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 7 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

b.

On cherche si les droites d_A et d_B sont sécantes.

On cherche donc $t \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} -7+2t = -11+5s & L_1 \\ 1-t = -5+s & L_2 \\ 7-3t = 11-4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -21+7s & L_1+2L_2 \\ t = 6-s & L_2 \\ 7-3t = 11-4s \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{16}{7} \\ t = \frac{26}{7} \\ 7-3t = 11-4s \end{cases}$. On regarde si la dernière équation est vérifiée.

D'une part, $7 - 3 \times \frac{26}{7} = -\frac{29}{7}$ et d'autre part, $11 - 4 \times \frac{16}{7} = \frac{13}{7} \neq -\frac{29}{7}$. La dernière équation n'est pas vérifiée donc il n'y a pas de solution.

Ainsi, les droites d_A et d_B n'admettent aucun point d'intersection. Les avions ne peuvent donc pas entrer en collision.

3.

a.

Montrons que le point E appartient à la droite d_A.

On cherche t tel que $\begin{cases} x_E = -7+2t \\ y_E = 1-t \\ z_E = 7-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -7+2t \\ -1 = 1-t \\ 1 = 7-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$. On trouve donc une solution. Ainsi, le point E appartient bien à la droite d_A. L'avion Alpha passera donc par ce point.

b.

Le plan P_E est perpendiculaire à la droite d_A donc tout vecteur directeur de la droite d_A est normal au plan P_E.

Ainsi, $\vec{u} = (2\,;\,-1\,;\,-3)$ est un vecteur normal au plan P_E.

Une équation cartésienne du plan P_E est donc $2x - y - 3z + d = 0$ où d est un réel à déterminer.

Le plan P_E passe par le point E. Ainsi, ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne ci-dessus.

Donc, $2x_E - y_E - 3z_E + d = 0 \Leftrightarrow -6 + 1 - 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 8$.

Une équation cartésienne du plan P_E est donc $2x - y - 3z + 8 = 0$.

c.

Montrons que F appartient à la fois au plan P_E et à la droite d_B.

$2x_F - y_F - 3z_F + 8 = -2 + 3 - 9 + 8 = 0$ car F appartient au plan P_E.

On cherche t tel que $\begin{cases} x_F = -11+5t \\ y_F = -5+t \\ z_F = 11-4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -11+5t \\ -3 = -5+t \\ 3 = 11-4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$. On trouve une solution donc le point F appartient à la droite d_B.

Ainsi, F est le point d'intersection du plan P_E avec la droite d_B.

d.

$\overrightarrow{EF} = (x_F - x_E\,; y_F - y_E\,; z_F - z_E) = (-1+3\,;\,-3+1\,; 3-1) = (2\,;\,-2\,; 2)$.

Donc, $EF = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12}$. Ainsi, $EF = 2\sqrt{3}$ km.

On a donc : $EF \approx 3{,}464$ km.

4.

3 milles nautiques = 3×1852 m = 5556 m =5,556 km

Or, $3{,}464 < 5{,}556$ donc la distance de sécurité n'est pas respectée.

Exercice 3 :

Partie A : Etude des fonctions f_n pour $n \geq 1$.

1.

a.

f_n est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
Pour tout $x \geq 0, f_n'(x) = nx^{n-1}e^x + x^n e^x = (n-x)x^{n-1}e^x$.

b.

On étudie le signe de $f_n'(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[, x^{n-1} \geq 0$ (car $x \geq 0$ donc produit de nombres positifs) et $e^x > 0$.
Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[, n - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq n$.
Donc, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[, f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq n$.

On a donc le tableau suivant :

x	0		n		$+\infty$
Signe de $f_n'(x)$		+	0	-	
Variations de f_n	0	↗	$\left(\frac{n}{e}\right)^n$	↘	0

En effet, $f_n(0) = 0^n e^{-0} = 0$ car $0^n = 0$ puisque $n \geq 1$.
De plus, $f_n(n) = n^n e^{-n} = \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$
Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[, f_n(x) = x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2.

Montrons que $f_n(1) = e^{-1}$.
$f_n(1) = 1^n e^{-1} = e^{-1}$.
Donc, le point A appartient bien à la courbe C_n.

Partie B : Etude des intégrales $\int_0^1 f_n(x)dx$ pour $n \geq 0$.

1.

a.

Pour tout entier naturel n, I_n représente l'aire comprise entre C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

b.

D'après le graphique, il semble $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

2.

$I_0 = \int_0^1 f_0(x)dx = \int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^1$ car la fonction $x \mapsto -e^{-x}$ est une primitive de $x \mapsto e^{-x}$.
Donc, $I_0 = -e^{-1} + 1$. $I_0 = 1 - e^{-1}$.

3.

a.

D'abord, pour tout $x \in [0\,;1]$, $x^n \geq 0$ et $x^{n+1} \geq 0$ (produits de nombre positifs car $x \geq 0$).
Montrons que pour tout $x \in [0\,;1], x^n - x^{n+1} \geq 0$.
Pour tout $x \in [0\,;1], x^n - x^{n+1} = x^n(1-x)$.
Pour tout $x \in [0\,;1], x^n \geq 0$ et $x \leq 1$ donc $-x \geq -1$ (car on multiplie -1<0) donc $1 - x \geq 0$.

Par produit, pour tout $x \in [0\,;1], x^n(1-x) \geq 0$ donc $x^n - x^{n+1} \geq 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0\,;1], x^{n+1} \leq x^n$.
D'après tout ce qui précède, pour tout $x \in [0\,;1], 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$.

b.

On multiplie l'inégalité précédente par $e^{-x} \geq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;1], 0 \leq x^{n+1}e^{-x} \leq x^n e^{-x}$.
Donc, comme $0 \leq 1$, par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 0dx \leq \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x}dx$.
$\int_0^1 0dx = [0]_0^1 = 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

4.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. Donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, la suite (I_n) converge vers une limite $l \geq 0$.

5.

Intégrons par parties.
On pose : $u'(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x^{n+1}$. On peut prendre $u(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = (n+1)x^n$.
Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivée continue sur [0 ; 1].
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \int_0^1 u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)dx$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{-x}dx = -e^{-1} + (n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}dx$ par linéarité de l'intégrale.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.

6.

a.

On suppose que $l > 0$.
D'une part, $\lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim_{N\to+\infty} I_N = l$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = l$.
D'autre part, par produit, $\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n = +\infty$ car $l > 0$.
Par somme, $\lim_{n\to+\infty} \left((n+1)I_n - \frac{1}{e}\right) = +\infty$.
Avec l'égalité de la question précédente, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = +\infty$.
On a donc une contradiction avec la première limite trouvée, qui est finie.

b.

Ce qui a été fait à la question précédente est un raisonnement par l'absurde. On a vu que suppose $l > 0$ amène à une contradiction. Ce cas est donc à rejeter.
Comme, d'après la question 4, $l \geq 0$, il ne reste qu'une seule possibilité : $l = 0$.

7.

Au début du script, on a une initialisation où l'on met I à la valeur de I_0 trouvée à la question 2.
Puis, dans la boucle, on calcule les termes suivants et on les ajoute à la liste L.
mystere(100) renvoie la liste des intégrales I_n pour n allant de 0 à 100.
Ainsi, cette instruction renvoie la liste des aires comprises entre l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ et la courbe C_n pour n allant de 0 à 100.

Exercice 4 :

Affirmation 1 :

L'équation homogène associée à (E) est $(E'): y' = \frac{1}{2}y$.

Il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = \frac{1}{2}$.

Les solutions de (E') sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{ax}$, soit $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On cherche maintenant une solution particulière constance que l'on note y_p.

Ainsi, y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, y_p'(x) = 0$.

De plus, y_p est solution de (E) donc pour tout $x \in \mathbb{R}, y_p'(x) = \frac{1}{2}y_p(x) + 4 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}y_p(x) + 4 \Leftrightarrow y_p(x) = -8$.

Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} - 8$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Donc, l'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2 :

Il n'y a ni ordre ni répétition.

On choisit d'abord 3 filles parmi les 18 puis 3 garçons parmi les 14.

Ainsi, le nombre de possibilités pour former une telle équipe est $\binom{18}{3} \times \binom{14}{3}$.

$\binom{18}{3} \times \binom{14}{3} = 816 \times 364 = 297024$.

Il y a donc 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

Ainsi, l'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc, en ajoutant 2, $1 \leq 2 + \cos(n) \leq 3$.

On applique la fonction inverse qui est décroissante sur $]0\,;\ +\infty[$.

Il vient : pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \geq \frac{1}{2+\cos(n)} \geq \frac{1}{3}$.

On multiplie par $n \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq \frac{n}{2+\cos(n)} \geq \frac{n}{3}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \geq \frac{n}{3}$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$.

Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Ainsi, l'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4 :

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,; y_B - y_A\,; z_B - z_A) = (4\,; -2\,; 6)$

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A\,; y_C - y_A\,; z_C - z_A) = (1\,; 0\,; 1)$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 10$.

D'autre part, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Ainsi, $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$.

Or, $AB = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ et $AC = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Donc, $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{10}{2\sqrt{14} \times \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{28}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

Donc, $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{5}{2\sqrt{7}}\right) \approx 19{,}1° \neq 30°$.

Ainsi, l'affirmation 4 est fausse.

Affirmation 5 :

Pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[, h''(x) = x\ln x - 3x = x(\ln x - 3)$.

Pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[, x > 0$ donc h'' est du signe de la fonction $x \mapsto \ln x - 3$ sur $]0\,;\ +\infty[$.

Pour tout $x \in]0\,;\ +\infty[, \ln x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq e^3$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction h'' est positive sur $[e^3\,;\ +\infty[$ donc h est convexe sur $[0\,;\ +\infty[$. L'affirmation 5 est vraie.