Corrigé du bac général 2025
Spécialité Mathématiques
Asie-Pacifique – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. L'énoncé nous donne :

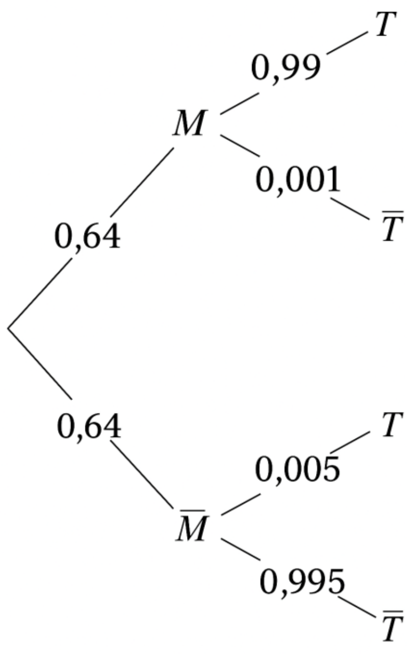
- $P_M(T) = 0{,}999$ (vrai positif)
- $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}005$ (faux positif)

2. D'après les données :

$$P(M) = \frac{270\,000}{750\,000} = 0{,}36$$

3. Complétons l'arbre pondéré :

- $P(M) = 0{,}36$, donc $P(\overline{M}) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$
- $P_M(T) = 0{,}999$, donc $P_M(\overline{T}) = 1 - 0{,}999 = 0{,}001$
- $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}005$, donc $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$



4. On calcule :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}36 \times 0{,}999 = 0{,}35964$$

5. On utilise la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$$
$$P(T) = 0{,}35964 + 0{,}64 \times 0{,}005 = 0{,}36284$$

6. On utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}35964}{0{,}36284} \approx 0{,}991$$

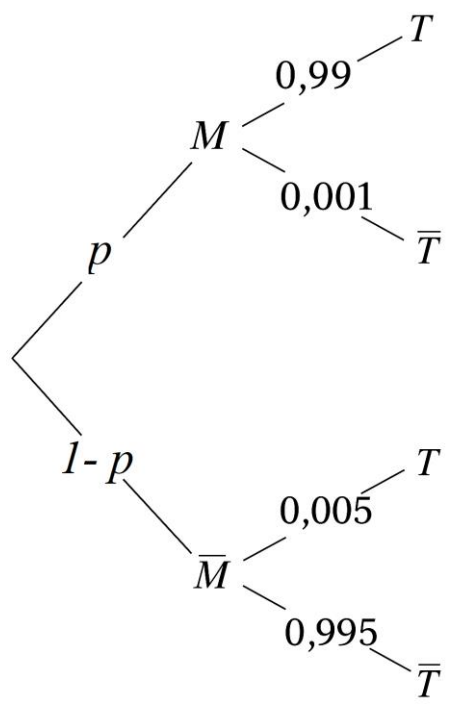
7. Le test est considéré comme fiable si $P_T(M) > 0{,}95$

Or ici, $P_T(M) \approx 0{,}991 > 0{,}95$, donc le test est fiable dans cette situation.

Partie B

1. On construit un arbre avec p la proportion de malades :

- $P(M) = p$, $P(\overline{M}) = 1 - p$
- $P_M(T) = 0{,}999$, $P_M(\overline{T}) = 0{,}001$
- $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}005$, $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}995$



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}999p + 0{,}005(1-p)$$

$$P(T) = 0{,}999p + 0{,}005 - 0{,}005p = 0{,}994p + 0{,}005$$

3. On calcule :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}999p}{0{,}994p + 0{,}005} = \frac{999p}{994p + 5}$$

4. On veut $P_T(M) > 0{,}95$:

$$\frac{999p}{994p+5} > 0{,}95$$

On résout cette inéquation :

$$999p > 0{,}95(994p + 5)$$

$$999p > 944{,}3p + 4{,}75$$

$$54{,}7p > 4{,}75$$

$$p > \frac{4{,}75}{54{,}7} \approx 0{,}087$$

Donc, le test est fiable si la proportion de personnes malades dépasse environ 8,7 %.

Partie C

On a $p = 0{,}36$, $X \sim \mathcal{B}(n, 0{,}36)$.

On cherche le plus petit entier n tel que :

$$P(X \geq 1) > 0{,}99$$

C'est équivalent à :

$$1 - P(X = 0) > 0{,}99 \Rightarrow P(X = 0) < 0{,}01$$

Or $P(X = 0) = (1-p)^n = 0,64^n < 0{,}01$

On cherche le plus petit n tel que :

$$0,64^n < 0{,}01$$

Prenons le logarithme :

$$n\ln(0{,}64) < \ln(0{,}01) \Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}64)} \approx \frac{-4{,}605}{-0{,}446} \approx 10{,}32$$

Donc le plus petit entier répondant à la condition est $n = 11$

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1. On a :

$$u_0 = 30$$

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 15 + 10 = 25$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 12{,}5 + 10 = 22{,}5$$

2. On pose $v_n = u_n - 20$

Alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = \left(\frac{1}{2}u_n + 10\right) - 20 = \frac{1}{2}u_n - 10$$

Mais $u_n = v_n + 20$, donc :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + 20) - 10 = \frac{1}{2}v_n + 10 - 10 = \frac{1}{2}v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

3. Comme $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = 10$, et la suite est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on a :

$$v_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4. Puisque $u_n = v_n + 20$, on obtient :

$$u_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 20$$

$$u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5. On a :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 20 + 0 = 20$$

Donc la suite (u_n) converge vers 20.

Partie B

1. On a :

$$w_0 = 45, \quad u_0 = 30$$

Donc :

$$w_1 = \frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}u_0 + 7 = \frac{1}{2} \times 45 + \frac{1}{2} \times 30 + 7 = 22{,}5 + 15 + 7 = 44{,}5$$

2. Il suffit d'inverser les lignes U= et W=, afin que le calcul de W se fasse avant le calcul de U, car w_{n+1} dépend de u_n et non pas de u_{n+1}. Le code est exécuté ligne par ligne.

```
def suite (n) :
  U=30
  W=45
  for i in range (1,n+1):
       W=W/2+U/2+7
       U=U/2+10
  return W
```

3. (a) On cherche à prouver par récurrence que :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

Initialisation : pour $n = 0$

$$w_0 = 45$$

$$10 \cdot 0 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 34 = 45$$

L'égalité est vraie.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie au rang n, montrons-la au rang $n + 1$

On a :

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7$$

On remplace :

- $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$
- $u_n = 10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 20$

Alors :

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}\left[10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34\right] + \frac{1}{2}\left[10\left(\frac{1}{2}\right)^n + 20\right] + 7$$

On regroupe :

- Terme avec $\left(\frac{1}{2}\right)^n$:

$$\frac{1}{2} \cdot 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot 10\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{21}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 10{,}5\left(\frac{1}{2}\right)^n = 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

- Constante :

$$\frac{1}{2} \cdot 34 + \frac{1}{2} \cdot 20 + 7 = 17 + 10 + 7 = 34$$

Donc :

$$w_{n+1} = 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$$

L'hérédité est démontrée. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

3. (b) On admet que pour tout $n \geq 4$:

$$0 \leq 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$$

Or la suite $\frac{10}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

Donc :

$$10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

Et aussi :

$$11\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

Donc :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34 \to 34$$

Ainsi, la suite (w_n) converge vers 34.

EXERCICE 3 (5 points)

Affirmation 1

Le vecteur directeur de (d) est :

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Le vecteur normal au plan P est :

$$\vec{n}_P = (2,\ 3,\ 6)$$

On vérifie si la droite est orthogonale au plan : il faut que le vecteur directeur de la droite soit colinéaire au vecteur normal au plan.

On cherche s'il existe un réel λ tel que :

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right) = \lambda(2,\ 3,\ 6)$$

Mais :

- $\frac{1}{3} = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$
- $\frac{1}{2} = 3\lambda = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
- $1 = 6\lambda = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$

La relation est vérifiée. Donc la droite est orthogonale au plan P.

Vérifions maintenant si le point $H(-6; 2; 2)$ appartient à la droite (d).

On cherche s'il existe t tel que :

$$-8 + \frac{1}{3}t = -6 \Rightarrow \frac{1}{3}t = 2 \Rightarrow t = 6$$

$$y = -1 + \frac{1}{2} \cdot 6 = -1 + 3 = 2, \quad z = -4 + 6 = 2$$

Donc H est un point de la droite.

Vérifions si $H \in P$:

$$2x + 3y + 6z = 2(-6) + 3(2) + 6(2) = -12 + 6 + 12 = 6 \Rightarrow 2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

Donc $H \in P$.

Affirmation 1 : vraie

Affirmation 2

On utilise le produit scalaire pour calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CH}$.

Vecteurs :

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} -6-3 \\ 2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CH} = (-3)(-9) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 27 + 4 = 31$$

Normes :

$$\| \overrightarrow{CD} \| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\| \overrightarrow{CH} \| = \sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{81+4+4} = \sqrt{89}$$

Cosinus de l'angle :

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CH}}{\| \overrightarrow{CD} \| \| \overrightarrow{CH} \|} = \frac{31}{\sqrt{13 \cdot 89}} \approx \frac{31}{\sqrt{1157}} \approx \frac{31}{34{,}02} \approx 0{,}911$$

$$\Rightarrow \theta \approx \arccos(0{,}911) \approx 24,1°$$

L'angle $\widehat{DCH}$ vaut environ 24,1°.

Affirmation 2 : fausse

Affirmation 3

L'intersection des 2 plans est une droite car les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires :

- $\vec{n}_P = (2,\ 3,\ 6)$
- $\vec{n}_{P'} = (1,\ -2,\ 3)$

On vérifie que les vecteurs ne sont pas colinéaires : Il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(2{,}3{,}6) = \lambda(1, -2{,}3)$ car :

- $2 = \lambda$
- $3 = -2\lambda \Rightarrow \lambda = -1{,}5$

Contradiction. Donc les plans sont bien sécants.

On vérifie qu'un point de la droite appartient aux deux plans :

Soit $A(t) = (3-3t,\ 0,\ t)$

Dans P :

$$2x + 3y + 6z = 2(3 - 3t) + 0 + 6t = 6 - 6t + 6t = 6 \Rightarrow P: 2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

Dans P' :

$$x - 2y + 3z = (3 - 3t) + 0 + 3t = 3 \Rightarrow P': x - 2y + 3z - 3 = 0$$

Le point appartient bien aux deux plans pour tout t. Donc la droite est bien l'intersection.

<u>Affirmation 3 : vraie</u>

<u>Affirmation 4</u>

Vecteur directeur de la droite (CD) :

$$\overrightarrow{CD} = (-3,\ 2,\ 0)$$

Projeter H sur la droite (CD) revient à chercher un point $J \in (CD)$ tel que $\overrightarrow{HJ} \perp \overrightarrow{CD}$

On vérifie que $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

$$\overrightarrow{HJ} = \left(-\frac{54}{13} + 6, \frac{62}{13} - 2,\ -2\right) = \left(\frac{24}{13}, \frac{36}{13},\ -2\right)$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{24}{13} \cdot (-3) + \frac{36}{13} \cdot 2 + (-2) \cdot 0 = \frac{-72 + 72}{13} = 0$$

Donc $J \in (CD)$ et $\overrightarrow{HJ} \perp (CD)$

<u>Affirmation 4 : vraie</u>

EXERCICE 4 (5 points)

<u>Partie A</u>

1. On lit graphiquement le moment où la température redescend à 40 °C, sa valeur initiale.

À l'instant $t = 0$, on a bien $f(0) = 40$. En observant la courbe, on remarque que la température redescend à 40 °C vers $t \approx 3{,}8$ minutes.

2. On sait que :

$$f(0) = (a \cdot 0 + b) \cdot e^0 = b \cdot 1 = b$$

Or $f(0) = 40$, donc :

$$b = 40$$

3. On dérive $f(t) = (at + 40)e^{-0{,}5t}$ à l'aide de la règle du produit :

$$f'(t) = a \cdot e^{-0{,}5t} + (at + 40) \cdot (-0{,}5)e^{-0{,}5t} = (a - 0{,}5at - 20)e^{-0{,}5t}$$

Puis on forme $f'(t) + 0{,}5f(t)$:

$$f'(t) + 0{,}5f(t) = (a - 0{,}5at - 20)e^{-0{,}5t} + 0{,}5(at + 40)e^{-0{,}5t}$$

On factorise par $e^{-0{,}5t}$:

$$= [a - 0{,}5at - 20 + 0{,}5at + 20]e^{-0{,}5t} = ae^{-0{,}5t}$$

On veut que cela soit égal à $60e^{-0{,}5t}$, donc :

$$a = 60$$

<u>Partie B</u>

1. On dérive :

$$\begin{aligned} f'(t) &= (60 \cdot e^{-0{,}5t} + (60t + 40)(-0{,}5)e^{-0{,}5t}) = (60 - 30t - 20)e^{-0{,}5t} \\ &= (40 - 30t)e^{-0{,}5t} \end{aligned}$$

2. (a) Étudions le signe de $f'(t) = (40 - 30t)e^{-0{,}5t}$

Sur $[0; 10]$, $e^{-0{,}5t} > 0$, donc le signe de $f'(t)$ dépend de $40 - 30t$

- $f'(t) > 0$ si $t < \frac{40}{30} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$
- $f'(t) = 0$ si $t = \frac{4}{3}$
- $f'(t) < 0$ si $t > \frac{4}{3}$

Donc :

- f est croissante sur $[0; \frac{4}{3}]$
- f est décroissante sur $[\frac{4}{3}; 10]$

Tableau de variations :

t	0		$\frac{4}{3}$		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f			$120e^{-2/3}$		
	40	$\nearrow$		$\searrow$	$640e^{-5}$

2. (b)

On veut résoudre $f(t) = 40$ sur $]0; 10]$.

Avec $f(t) = (60t + 40)e^{-0,5t}$

Équation :

$$(60t + 40)e^{-0,5t} = 40 \Rightarrow 60t + 40 = 40e^{0,5t} \Rightarrow \text{équation transcendante}$$

On constate que la fonction est d'abord croissante, puis décroissante, donc l'équation $f(t) = 40$ admet exactement deux solutions, dont l'une est $t = 0$ et l'autre est strictement positive.

On cherche la deuxième solution avec la calculatrice, et on trouve :

$$\alpha \approx 3{,}8$$

2. (c) Cette valeur correspond à l'instant où la température est redevenue égale à sa valeur initiale, au bout de 3,8 minutes, soit 3 minutes et 48 secondes.

3. (a) On fait une intégration par parties pour :

$$\int_0^4 f(t)\,dt = \int_0^4 (60t + 40)e^{-0,5t}\,dt$$

On pose :

- $u(t) = 60t + 40 \Rightarrow u'(t) = 60$
- $v'(t) = e^{-0,5t} \Rightarrow v(t) = -2e^{-0,5t}$

Alors :

$$\int_0^4 f(t)\,dt = [-2(60\mathrm{t} + 40)e^{-0,5t}]_0^4 - \int_0^4 -2 \cdot 60\,e^{-0,5t}dt$$

$$= -560e^{-2} + 80 + 120\int_0^4 e^{-0,5t}\,dt$$

$$= -\frac{560}{e^2} + 80 + 120\left[-2e^{-0,5t}\right]_0^4$$

$$= -\frac{560}{e^2} - 240e^{-2} + 240 = 320 - \frac{800}{e^2}$$

3. (b) Valeur approchée :

$$e^2 \approx 7{,}389 \Rightarrow \frac{800}{e^2} \approx 108{,}3 \Rightarrow \int_0^4 f(t)dt \approx 320 - 108{,}3 = 211{,}7$$

Température moyenne :

$$\frac{1}{4-0} \cdot 211{,}7 \approx 52{,}9$$

Donc : environ 53 °C.

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/