

Corrigé du bac général 2025

Spécialité Mathématiques

Amérique du Sud – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :

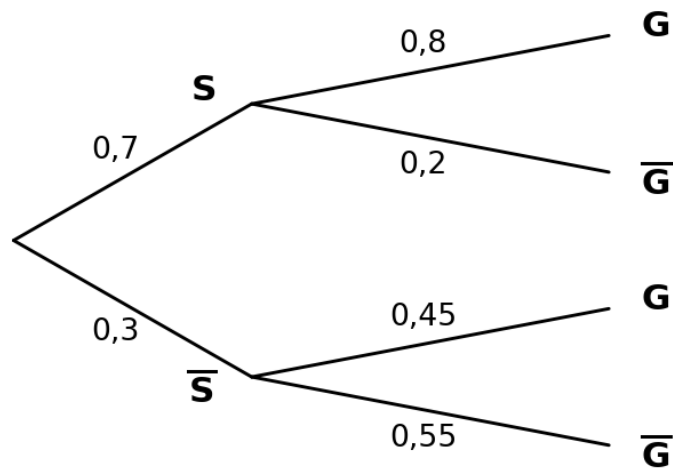
www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. \bar{S} est l'événement : « Abel échoue à son premier service ».

Arbre pondéré :



2. On calcule :

$$P(S \cap G) = P(S) \times P(G | S) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P(S \cap G) + P(\bar{S} \cap G)$$

$$P(\bar{S} \cap G) = P(\bar{S}) \times P(G | \bar{S}) = 0,3 \times 0,45 = 0,135$$

$$\text{Donc } P(G) = 0,56 + 0,135 = 0,695$$

4. On cherche $P(S | G)$:

$$P(S | G) = \frac{P(S \cap G)}{P(G)} = \frac{0,56}{0,695} \approx 0,806$$

5. Si S et G étaient indépendants, on aurait $P(S \cap G) = P(S)P(G)$.

$$\text{Or } P(S)P(G) = 0,7 \times 0,695 = 0,4865 \neq 0,56$$

Donc S et G ne sont pas indépendants.

Partie B

1. a. Chaque balle a une probabilité $p = 0,85$ d'être conforme, et les 20 tests sont assimilés à des tirages avec remise (donc indépendants et de même probabilité).

Ainsi X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,85)$.

1. b. On utilise la calculatrice :

$$P(X \leq 18) \approx 0,824$$

1. c. « Au moins deux balles ne sont pas conformes » signifie : il y a au plus 18 balles conformes. C'est l'évènement $\{X \leq 18\}$.

Donc la probabilité vaut $P(X \leq 18) \approx 0,824$.

1. d. Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, on a : $E(X) = np$

Donc : $E(X) = 20 \times 0,85 = 17$

2. a. On a :

$$M_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Avec $E(X_i) = 0,85$

Et $\text{Var}(X_i) = 0,85 \times 0,15 = 0,1275$

Donc, d'après la linéarité de l'espérance :

$$E(M_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0,85$$

Et en utilisant l'additivité de la variance :

$$\text{Var}(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{n \times 0,1275}{n^2} = \frac{0,1275}{n}$$

2. b. Rappelons l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev.

Pour toute variable Y et tout $a > 0$, on a :

$$P(|Y - E(Y)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(Y)}{a^2}$$

On applique à $Y = M_n$ et $a = 0,10$:

$$\{0,75 < M_n < 0,95\} = \{|M_n - 0,85| < 0,10\}$$

Donc :

$$P(0,75 < M_n < 0,95) = 1 - P(|M_n - 0,85| \geq 0,10) \geq 1 - \frac{\text{Var}(M_n)}{0,10^2}$$

Donc :

$$P(0,75 < M_n < 0,95) \geq 1 - \frac{0,1275/n}{0,01}$$

$$\Leftrightarrow P(0,75 < M_n < 0,95) \geq 1 - \frac{12,75}{n}$$

2. c. On veut $P(0,75 < M_n < 0,95) > 0,9$

Il suffit que :

$$1 - \frac{12,75}{n} > 0,9$$

$$\Leftrightarrow \frac{12,75}{n} < 0,1$$

$$\Leftrightarrow n > 127,5$$

Un choix possible est $n = 128$.

EXERCICE 2 (4 points)

1. Réponse c.

On lit sur les représentations paramétriques des vecteurs directeurs.

$$\vec{u}_1 = (-3, 2, 1) \quad \vec{u}_2 = (1, 2, 1)$$

Ils ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

Produit scalaire :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 2$$

Ce produit scalaire n'est pas nul, donc elles ne sont pas orthogonales.

On cherche alors une éventuelle intersection en résolvant, avec t et s :

$$\begin{cases} 1 - 3t = -4 + s \\ 4 + 2t = 2 + 2s \\ t = -1 + s \end{cases}$$

De $t = -1 + s$, on tire $s = t + 1$. En remplaçant dans $1 - 3t = -4 + s$, on obtient :

$$1 - 3t = -4 + (t + 1) = -3 + t$$

D'où $4t = 4$, donc $t = 1$ puis $s = 2$.

La deuxième équation est bien vérifiée, donc les droites sont sécantes. Réponse c.

2. Réponse b.

Un vecteur directeur de la droite d est :

$$\vec{u} = (1, -1, 2)$$

Le plan P a pour équation $4x + 2y - z + 3 = 0$, donc un vecteur normal est :

$$\vec{n} = (4, 2, -1)$$

On calcule le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 4 + (-1) \times 2 + 2 \times (-1) = 0$$

Donc \vec{u} est orthogonal à \vec{n} , ce qui signifie que la droite d est parallèle au plan P .

Pour savoir si la droite est incluse dans le plan, on teste un point de d , par exemple pour $t = 0$: $M(1,3,1)$. On remplace dans l'équation du plan :

$$4 \times 1 + 2 \times 3 - 1 + 3 = 12$$

Ce n'est pas nul, donc $M \notin P$ et la droite n'est pas incluse dans le plan.

La droite d est donc parallèle strictement au plan P . Réponse b.

3. Réponse a.

On calcule :

$$\overrightarrow{AB} = (7 - 3, 3 - 2, 1 - 1) = (4, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1 - 3, 4 - 2, 5 - 1) = (-4, 2, 4)$$

\overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires (la troisième coordonnée passe de 0 à 4), donc A, B, C ne sont pas alignés.

De plus :

$$\overrightarrow{CD} = (-3 - (-1), 3 - 4, 5 - 5) = (-2, -1, 0)$$

Les rapports $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{1} = -1$ sont différents, donc \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ne sont pas colinéaires.

La seule réponse possible restante est donc la réponse a.

4. Réponse c.

a) On teste $R(1,1,-2)$ dans chaque plan.

Dans Q : $3x - 2y + z + 1 = 0$:

$$3 - 2 - 2 + 1 = 0$$

Donc $R \in Q$.

Dans Q' : $4x + y - z + 3 = 0$:

$$4 + 1 - (-2) + 3 = 10$$

Donc $R \notin Q'$, donc la réponse a est fausse.

b) Les plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

$$\vec{n} = (3, -2, 1) \quad \vec{n}' = (4, 1, -1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 3 \times 4 + (-2) \times 1 + 1 \times (-1) = 9$$

Ce n'est pas nul, donc la réponse b est fausse.

c) On vérifie que la droite proposée appartient aux deux plans en remplaçant $x = t$, $y = 7t + 4$, $z = 11t + 7$.

Dans Q :

$$3t - 2(7t + 4) + (11t + 7) + 1 = 0$$

Dans Q' :

$$4t + (7t + 4) - (11t + 7) + 3 = 0$$

Les deux égalités sont vraies pour tout t , donc cette droite est bien l'intersection des deux plans. Donc la réponse c est vraie.

EXERCICE 3 (4 points)

1. On a $v_0 = \ln(4)$, donc :

$$v_1 = \ln(-1 + 2e^{v_0}) = \ln(-1 + 2e^{\ln 4}) = \ln(7)$$

De plus :

$$w_0 = -1 + e^{v_0} = -1 + e^{\ln 4} = 3$$

2. a. En B3, on doit calculer v_1 à partir de v_0 situé en B2, donc la formule doit commencer par « = » et utiliser B2 :

$$=LN(-1+2*EXP(B2))$$

Il s'agit de la formule 2.

2. b. À la lecture des premières valeurs, on conjecture que la suite (v_n) est strictement croissante.

2. c. On pose la propriété $P(n) : v_{n+1} > v_n$.

Initialisation :

D'après la question 1, $v_0 = \ln(4)$ et $v_1 = \ln(7)$, donc $v_1 > v_0$. Ainsi $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

On suppose $P(n)$ vraie, donc $v_{n+1} > v_n$. Comme la suite (v_n) est strictement positive, on a en particulier $v_{n+1} > 0$. Ainsi :

$$v_{n+2} - v_{n+1} = \ln(-1 + 2e^{v_{n+1}}) - v_{n+1} = \ln\left(\frac{-1 + 2e^{v_{n+1}}}{e^{v_{n+1}}}\right) = \ln(2 - e^{-v_{n+1}})$$

Or $v_{n+1} > 0$ implique $e^{-v_{n+1}} \in (0,1)$, donc $2 - e^{-v_{n+1}} \in (1,2)$, et ainsi :

$$\ln(2 - e^{-v_{n+1}}) > 0$$

Donc $v_{n+2} - v_{n+1} > 0$, ce qui donne $v_{n+2} > v_{n+1}$, autrement dit $P(n+1)$.

Conclusion :

Par récurrence, pour tout n , $v_{n+1} > v_n$. La suite (v_n) est donc strictement croissante.

3. a. On calcule :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= -1 + e^{v_{n+1}} = -1 + e^{\ln(-1+2e^{v_n})} = -1 + (-1 + 2e^{v_n}) = 2e^{v_n} - 2 \\ &= 2(e^{v_n} - 1) = 2(-1 + e^{v_n}) = 2w_n \end{aligned}$$

La suite (w_n) est géométrique de raison 2, et de premier terme $w_0 = 3$.

3. b. Comme (w_n) est géométrique de raison 2 et $w_0 = 3$, on a :

$$w_n = 3 \times 2^n$$

Or $w_n = -1 + e^{v_n}$, donc $e^{v_n} = 1 + w_n$, d'où :

$$e^{v_n} = 1 + 3 \times 2^n$$

Et donc :

$$v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$$

3. c. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $2^n \rightarrow +\infty$, donc $1 + 3 \times 2^n \rightarrow +\infty$.

Par croissance de \ln , on a donc :

$$v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n) \rightarrow +\infty$$

La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

4. Dans l'algorithme, la variable V vaut d'abord v_0 , puis après une itération de la boucle

$$V = \ln(2\exp(V) - 1)$$

Donc V prend successivement les valeurs v_1, v_2, \dots . Le compteur n est incrémenté de 1 à chaque tour.

Si $S \leq v_0$, la condition $V < S$ est fautive dès le départ, la boucle ne s'exécute pas et la fonction renvoie 0.

Si $S > v_0$, comme (v_n) est strictement croissante et $v_n \rightarrow +\infty$ (question 3. c), il existe un entier N tel que $v_N \geq S$. Au bout de N itérations, on a alors $V = v_N \geq S$, donc la condition $V < S$ devient fautive et la boucle s'arrête. La fonction renvoie donc un résultat quel que soit le réel S .

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A : dénombrement

1. On tire successivement et sans remise parmi 60 entiers, donc on obtient des couples ordonnés $(a; c)$ avec $a \neq c$.

Nombre de couples possibles : $60 \times 59 = 3540$.

2. Le discriminant de $ax^2 + 2x + c = 0$ vaut $\Delta = 2^2 - 4ac = 4 - 4ac = 4(1 - ac)$.

L'équation a deux solutions réelles distinctes si et seulement si $\Delta > 0$, ce qui équivaut à $1 - ac > 0$, donc à $ac < 1$.

3. L'évènement contraire \overline{M} correspond à $ac \geq 1$. Comme a et c sont des entiers non nuls, cela impose que a et c aient le même signe.

- Si $a > 0$, alors a a 30 choix et c a 29 choix (sans remise) : $30 \times 29 = 870$.
- Si $a < 0$, même comptage : $30 \times 29 = 870$.

Donc \overline{M} comporte $870 + 870 = 1740$ issues.

4. On calcule :

$$P(M) = 1 - P(\overline{M}) = 1 - \frac{1740}{3540} = \frac{1800}{3540} = \frac{30}{59}$$

Ainsi $P(M) \approx 0,51$ (arrondi à 10^{-2}).

Partie B : équation différentielle

1. L'équation différentielle $y' + 10y = 0$ équivaut à $y' = -10y$.

Les solutions sont $y(x) = Ke^{-10x}$, où K est une constante réelle.

2. On pose $f(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}$

Écrivons $f(x) = P(x)e^{-5x+1}$ avec $P(x) = 6x^2 + 2x - 2$.

Alors $f'(x) = (P'(x) - 5P(x))e^{-5x+1}$.

Donc :

$$f'(x) + 10f(x) = (P'(x) - 5P(x) + 10P(x))e^{-5x+1} = (P'(x) + 5P(x))e^{-5x+1}$$

Or $P'(x) = 12x + 2$, donc :

$$P'(x) + 5P(x) = (12x + 2) + 5(6x^2 + 2x - 2) = 30x^2 + 22x - 8$$

Ainsi $f'(x) + 10f(x) = (30x^2 + 22x - 8)e^{-5x+1}$, donc f est bien une solution particulière de (E).

3. Les solutions de (E) sont la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène :

$$y(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1} + Ke^{-10x}$$

où K est une constante réelle.

Partie C : étude de fonction

1. Quand $x \rightarrow -\infty$, on a :

$$e^{-5x+1} \rightarrow +\infty$$

Et :

$$6x^2 + 2x - 2 = x^2 \left(6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \rightarrow +\infty$$

Le produit tend donc vers $+\infty$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 2x - 2 = 0$ (l'exponentielle n'est jamais nulle).

C'est une équation du type $ax^2 + 2x + c = 0$ avec $a = 6$ et $c = -2$, donc $ac = -12 < 1$. D'après la partie A, elle a deux solutions réelles distinctes.

Donc \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en deux points.

3. Une tangente est horizontale en x_0 si $f'(x_0) = 0$.

D'après la partie B appliquée à f :

$$f'(x) = (30x^2 + 22x - 8)e^{-5x+1} - 10f(x) = (-30x^2 + 2x + 12)e^{-5x+1}$$

Donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -30x^2 + 2x + 12 = 0$.

C'est encore de la forme $ax^2 + 2x + c = 0$ avec $a = -30$ et $c = 12$, donc $ac = -360 < 1$. D'après la partie A, cette équation a deux solutions réelles distinctes.

Ainsi \mathcal{C}_f possède deux tangentes horizontales.

4. Comme $e^{-5x+1} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-30x^2 + 2x + 12$.

On résout $-30x^2 + 2x + 12 = 0 \Leftrightarrow 30x^2 - 2x - 12 = 0$ et $\Delta = 1444 = 38^2$, donc les racines sont $-\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

La parabole $-30x^2 + 2x + 12$ est tournée vers le bas, donc $f'(x) < 0$ à l'extérieur des racines et $f'(x) > 0$ entre elles.

De plus

$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = \left(6 \cdot \frac{9}{25} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 2\right) e^4 = -\frac{26}{25} e^4$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(6 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{3} - 2\right) e^{-7/3} = 2e^{-7/3}$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{26}{25}e^4$		$2e^{-7/3}$		0

5. Sur $]-\infty, -3/5]$, f est strictement décroissante et passe de $+\infty$ à une valeur négative, donc l'équation $f(x) = 1$ y admet une unique solution (théorème des valeurs intermédiaires).

Sur $[-3/5, +\infty[$, le maximum de f vaut $2e^{-7/3} \approx 0,19 < 1$. Donc $f(x) = 1$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

Conclusion : l'équation $f(x) = 1$ admet une seule solution sur \mathbb{R} .

6. a. Posons :

$$u(x) = -\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}$$

Ainsi $F(x) = u(x)e^{-5x+1}$

Alors $F'(x) = (u'(x) - 5u(x))e^{-5x+1}$

Or $u'(x) = -\frac{12}{5}x - \frac{22}{25}$

Donc :

$$u'(x) - 5u(x) = \left(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25}\right) - 5\left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right) = 6x^2 + 2x - 2$$

Ainsi $F'(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1} = f(x)$

Donc F est bien une primitive de f sur \mathbb{R} .

6. b. On a $I_m = F(m) - F(0,2)$. En remplaçant $x = 0,2 = \frac{1}{5}$, on obtient $F(0,2) = 0$, donc $I_m = F(m)$.

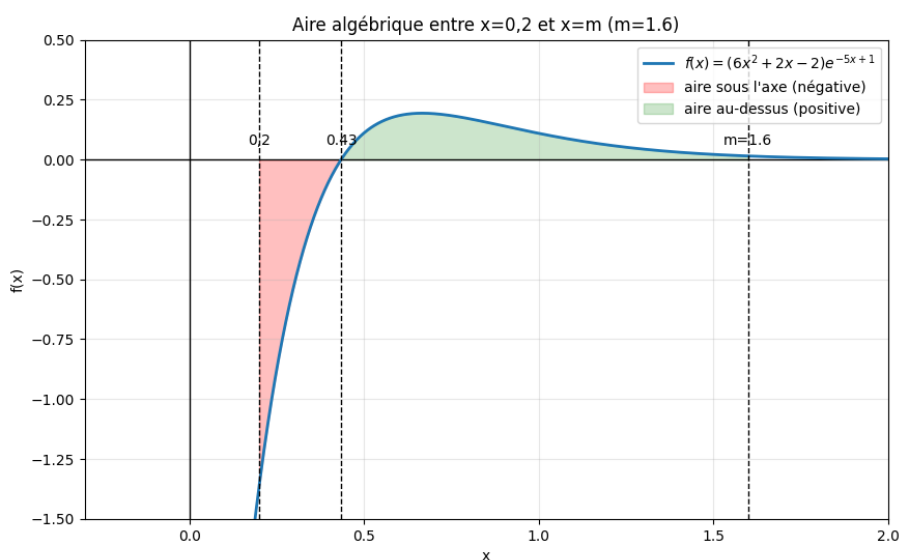
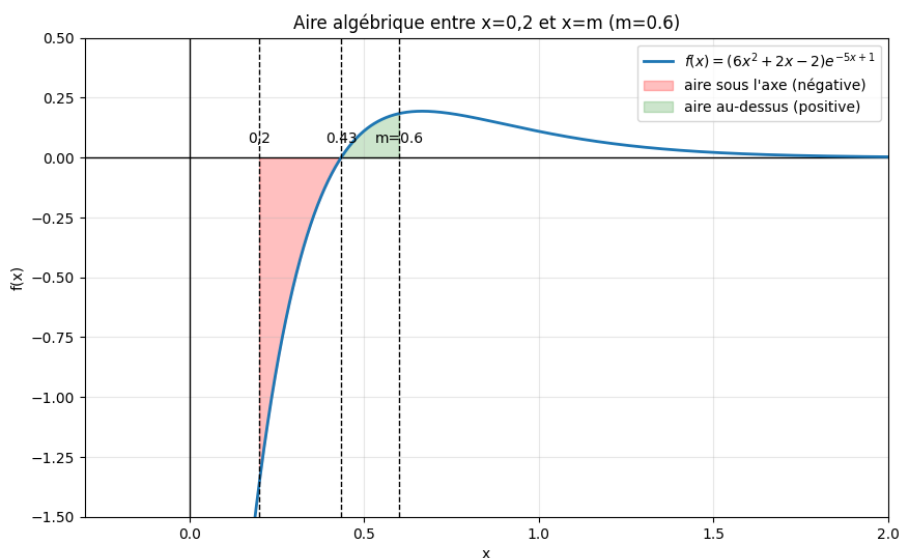
De plus

$$F(x) = \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right)e^{-5x+1} = -\frac{6}{5}\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{14}{15}\right)e^{-5x+1}$$

Pour $m > 0,2$, les facteurs $\left(m - \frac{1}{5}\right)$ et $\left(m + \frac{14}{15}\right)$ sont positifs, l'exponentielle est positive, donc $F(m) < 0$, donc $I_m < 0$.

Il n'existe donc pas de valeur de $m > 0,2$ telle que $I_m = 0$. Graphiquement, l'aire algébrique entre \mathcal{C}_f et l'axe des abscisses, de $x = 0,2$ à $x = m$, reste toujours négative (la partie sous l'axe l'emporte).

Pour aider à comprendre :



Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé maths au baccalauréat :

www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/