BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

<u>Exercice 1</u> (5 points)

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

*Les **PARTIES A** et **B** sont indépendantes.*

PARTIE A

L'entraineur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entrainement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de $0{,}32$.
Lors d'un entrainement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.

3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.

5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.

- **a.** Exprimer T en fonction de N.
- **b.** En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
- **c.** Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

PARTIE B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.
On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1er , 2e , …, n-ième matchs. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X.

On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
   a. Que représente la variable aléatoire M_{50}?
   b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50}.
   c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.
   d. En déduire que la probabilité de l'événement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à $0{,}85$.

2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
   « Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0{,}01$ ».

Exercice 2 (5 points)

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au 16e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}\ .$$

PARTIE A

1. a. Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.

b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.

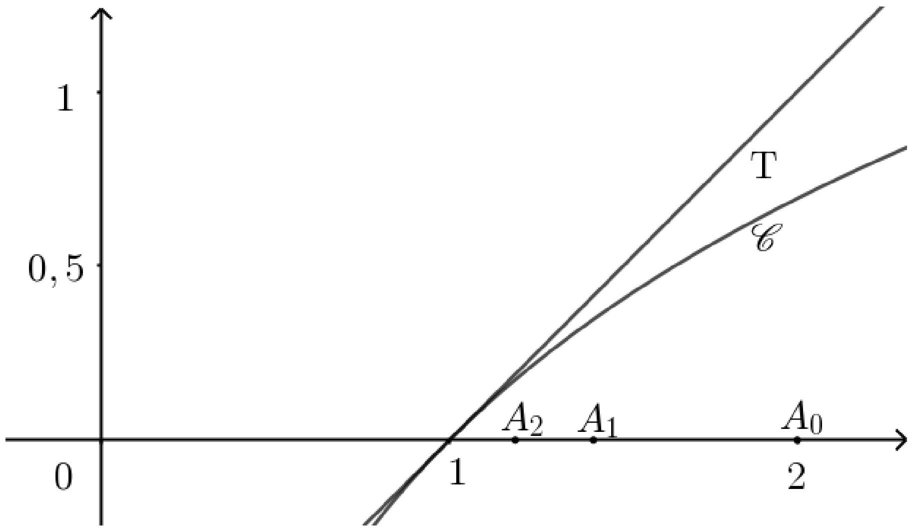
d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
   Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 *et* u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x-1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;1{,}01[$.

a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0{,}99\,;1{,}01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.

b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.

c. Déduire des questions 1.c. et 2.b. de la partie B une approximation de $\ln(2)$.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.
On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` *correspond à* $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...........

    return L
```

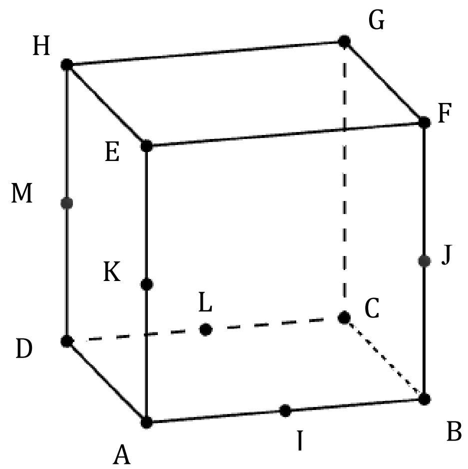
<u>Exercice 3</u> (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1. Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG}\right)$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = -\frac{1}{4}$ »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points $A\,(2\,;\ 0\,;-1)$ et $B\,(5\,;-3\,;7)$

Affirmation 4 : « Le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan $\mathcal{P}$' parallèle à $\mathcal{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases} \text{, où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

Exercice 4 (5 points)

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, $f'(x) = \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))$.

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x \sin(x) \geq x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes : $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{J}$

2. En déduire que $\mathrm{I} = \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.