

# Corrigé du bac général 2024

## Spécialité Mathématiques – Polynésie–

### Jour 1

## BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

## MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.*

*L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.*

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site [sujetdebac.fr](http://sujetdebac.fr)

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :  
[www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/](http://www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/)

## EXERCICE 1 (4 points)

Données :

- $A(2,1,-1), B(-1,2,1), C(5,0,-3)$
- Plan  $\mathcal{P}: x + 5y - 2z + 3 = 0$
- Droite  $\mathcal{D}: \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$

**Affirmation 1** : Le vecteur  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  est-il normal au plan (OAC) ?

On calcule deux vecteurs du plan (OAC) :

- $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\vec{OC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

On vérifie maintenant si ces deux vecteurs sont orthogonaux à  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  en calculant les produits scalaires :

- $\vec{OA} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 2 + 0 - 2 = 0$
- $\vec{OC} \cdot \vec{n} = 5 \times 1 + 0 \times 0 + (-3) \times 2 = 5 + 0 - 6 = -1$

Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal à  $\vec{OA}$ , mais pas à  $\vec{OC}$ . Donc, il n'est pas orthogonal à tous les vecteurs du plan, et n'est donc pas normal au plan (OAC).

**L'affirmation 1 est fausse.**

**Affirmation 2** : Les droites  $\mathcal{D}$  et  $(AB)$  sont-elles sécantes au point  $C$  ?

On calcule le vecteur  $\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ce sera le vecteur directeur de la droite  $(AB)$ .

Vérifions si le point  $C(5,0,-3)$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ . On cherche un réel  $t$  tel que :

$$\begin{cases} -t + 3 = 5 \Rightarrow t = -2 \\ t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2 \\ 2t + 1 = -3 \Rightarrow t = -2 \end{cases}$$

Les trois équations donnent le même  $t = -2$ , donc le point  $C$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .

Voyons maintenant si  $C$  appartient à la droite  $(AB)$ . On cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alors, on devrait avoir :

$$3 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = -1 - 1 = \lambda \cdot 1 = -1 - 2 = \lambda \cdot 2 = -2$$

Tout est cohérent, donc  $C$  appartient à la droite  $(AB)$  aussi.

**L'affirmation 2 est vraie.**

**Affirmation 3 :** La droite  $\mathcal{D}$  est-elle parallèle au plan  $\mathcal{P}$  ?

Vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ :  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vecteur normal du plan  $\mathcal{P}$ :  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Calcul du produit scalaire :

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) = -1 + 5 - 4 = 0$$

Donc, le vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  est orthogonal au vecteur normal de  $\mathcal{P}$ . Cela signifie que la droite est parallèle au plan.

**L'affirmation 3 est vraie.**

**Affirmation 4 :** Le plan médiateur du segment  $[BC]$  a-t-il pour équation  $3x - y - 2z - 7 = 0$  ?

Calcul du milieu  $M$  de  $[BC]$  :

$$M = \left( \frac{-1+5}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{1+(-3)}{2} \right) = (2, 1, -1)$$

Vecteur  $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ce vecteur est normal au plan médiateur. On cherche donc un plan de vecteur normal  $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$  passant par  $(2, 1, -1)$ .

Équation du plan médiateur :

$$6(x-2) - 2(y-1) - 4(z+1) = 0 \Rightarrow 6x - 12 - 2y + 2 - 4z - 4 = 0 \Rightarrow 6x - 2y - 4z - 14 = 0$$

Comparons avec l'équation donnée :  $3x - y - 2z - 7 = 0$ . Il s'agit exactement du même plan, divisé par 2.

**L'affirmation 4 est vraie.**

## EXERCICE 2 (5 points)

### Partie A

1. On a l'équation différentielle suivante :

$$(E): y' + 0,02y = m$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. La méthode classique consiste à :

- Etape 1, résoudre l'équation homogène associée :

$$y' + 0,02y = 0$$

qui admet pour solution générale :

$$y_h(t) = k \cdot e^{-0,02t}$$

- Etape 2, chercher une solution particulière de l'équation complète  $y' + 0,02y = m$ . Comme le second membre est constant, une solution particulière est une constante  $y_p = c$

Alors :

$$y_p' + 0,02y_p = 0 + 0,02c = m \Rightarrow c = \frac{m}{0,02} = 50m$$

Donc, la solution générale est :

$$y(t) = k \cdot e^{-0,02t} + 50m$$

Ce qui correspond bien à l'affichage du logiciel :

$$y = k \cdot \exp(-0,02t) + 50m$$

2. On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 30$$

Or :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (k \cdot e^{-0,02t} + 50m) = 0 + 50m = 50m$$

Donc :

$$50m = 30 \Rightarrow m = \frac{30}{50} = 0,6$$

3. On connaît maintenant la valeur de  $m = 0,6$ , donc la solution est :

$$y(t) = k \cdot e^{-0,02t} + 50 \cdot 0,6 = k \cdot e^{-0,02t} + 30$$

On utilise la condition initiale  $y(0) = 210$  :

$$210 = k \cdot e^0 + 30 = k + 30 \Rightarrow k = 180$$

Donc :

$$f(t) = 180 \cdot e^{-0,02t} + 30$$

### **Partie B**

On reprend :  $f(t) = 180 \cdot e^{-0,02t} + 30$

1. a. Le graphique montre une intersection vers  $T \approx 110$  secondes.

b. On résout  $f(T) = 50$  :

$$180 \cdot e^{-0,02T} + 30 = 50$$

$$\Leftrightarrow 180 \cdot e^{-0,02T} = 20$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,02T} = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow -0,02T = \ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln(9)$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\ln(9)}{0,02}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{2\ln(3)}{0,02} = 100 \cdot \ln(3) \approx 109,86$$

2. Valeur moyenne de la température sur l'intervalle  $[0; 100]$  :

$$\text{Valeur moyenne} = \frac{1}{100} \int_0^{100} f(t) dt = \frac{1}{100} \int_0^{100} (180 \cdot e^{-0,02t} + 30) dt$$

On intègre terme à terme :

- $\int_0^{100} 180 \cdot e^{-0,02t} dt = 180 \cdot \left[ \frac{e^{-0,02t}}{-0,02} \right]_0^{100} = -9000 \cdot (e^{-2} - 1)$

- $\int_0^{100} 30 dt = 30 \cdot 100 = 3000$

Donc :

$$\int_0^{100} f(t) dt = -9000(e^{-2} - 1) + 3000 = 9000(1 - e^{-2}) + 3000$$

Valeur moyenne :

$$\frac{1}{100} (9000(1 - e^{-2}) + 3000) = 90(1 - e^{-2}) + 30 \approx 107,82$$

### EXERCICE 3 (5 points)

#### Partie A

1. La variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}\left(n = 3, p = \frac{1}{2}\right)$$

car :

- il y a 3 épreuves indépendantes,
- chaque lancer a 2 issues possibles,
- la probabilité d'obtenir Face à chaque lancer est  $\frac{1}{2}$ .

2. On complète le tableau de la loi de probabilité de  $X$  :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \binom{3}{k} \cdot \frac{1}{8}$$

$k$	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

## Partie B

1. Si une seule pièce tombe sur Face au premier lancer (événement  $A_1$ ), alors deux pièces sont relancées. Pour gagner, il faut que les deux pièces relancées fassent Face.

La probabilité d'obtenir deux Faces avec deux pièces équilibrées est :

$$\mathbb{P}(G \mid A_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

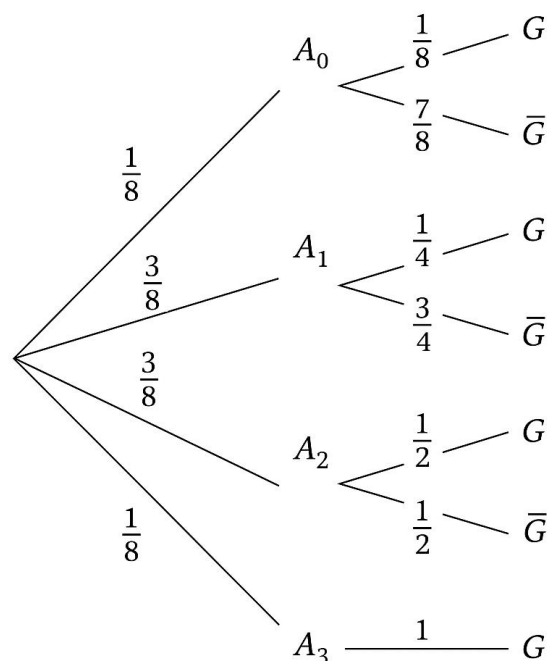
2. On utilise la loi binomiale de la partie A pour les probabilités de  $A_k$  :

- $\mathbb{P}(A_0) = \frac{1}{8}$
- $\mathbb{P}(A_1) = \frac{3}{8}$
- $\mathbb{P}(A_2) = \frac{3}{8}$
- $\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{8}$

Probabilités conditionnelles :

- Si  $A_0$  : 3 pièces à relancer  $\rightarrow$  pour gagner :  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
- Si  $A_1$  : 2 pièces à relancer  $\rightarrow$  pour gagner :  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
- Si  $A_2$  : 1 pièce à relancer  $\rightarrow$  pour gagner :  $\frac{1}{2}$
- Si  $A_3$  : partie gagnée directement

Ce qui donne l'arbre suivant :



3. Probabilité totale de gagner :

$$p = \mathbb{P}(G) = \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(A_k \cap G) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{12}{64} + \frac{8}{64} = \frac{27}{64}$$

4. La partie est gagnée. On veut connaître la probabilité que exactement une pièce soit tombée sur Face au premier lancer, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(A_1 | G) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{27}{64}} = \frac{3}{32} \cdot \frac{64}{27} = \frac{192}{864} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

5. On joue plusieurs parties indépendantes. On veut que la probabilité de gagner au moins une fois dépasse 0,95.

Soit  $n$  le nombre de parties jouées.

Alors :

$$\mathbb{P}(\text{au moins un gain}) = 1 - (1 - p)^n > 0,95 \Rightarrow (1 - p)^n < 0,05$$

On a  $p = \frac{27}{64}$ , donc  $1 - p = \frac{37}{64}$

On cherche le plus petit entier  $n$  tel que :

$$\left(\frac{37}{64}\right)^n < 0,05$$

On utilise le logarithme :

$$n \cdot \ln\left(\frac{37}{64}\right) < \ln(0,05) \Rightarrow n > \frac{\ln(0,05)}{\ln(37/64)} \approx \frac{-2,9957}{-0,5482} \approx 5,47$$

Donc il faut jouer au moins 6 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois dépasse 0,95.

## EXERCICE 4 (6 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}$$

### Partie A

1. On complète la fonction Python :

```
def suite(n):  
    u = 3  
    for i in range(n):  
        u = 4 / (5 - u)  
    return u
```

2. Vérification de l'affichage de suite(2) :

On calcule :

- $u_0 = 3$
- $u_1 = \frac{4}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$
- $u_2 = \frac{4}{5-2} = \frac{4}{3} \approx 1,3333$

Cela correspond bien à l'affichage de suite(2).

3. En analysant les affichages, la suite semble décroissante et converge vers 1.

### Partie B

On pose la fonction  $f(x) = \frac{4}{5-x}$  définie sur  $] -\infty; 5[$ . La suite est définie par :

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. On calcule la dérivée :

$$f(x) = \frac{4}{5-x} = \frac{0 - 4 \times (-1)}{(5-x)^2} = \frac{4}{(5-x)^2}$$

La dérivée est strictement positive sur l'intervalle considéré.

Donc,  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; 5[$ .

**2.** Montrons par récurrence que  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :  $u_0 = 3$ , donc  $1 \leq u_1 = \frac{4}{5-3} = 2 \leq 3 = u_0 \leq 4$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$ .

On applique la fonction  $f$  qui conserve l'ordre car elle est croissante sur  $] -\infty; 5[$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4) \\ \Leftrightarrow 1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 4 \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n + 1$ .

Conclusion : par récurrence, pour tout  $n$ ,  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

**3. a.** Montrons que  $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{4}{5-x} = x \Rightarrow 4 = x(5-x) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Donc l'équivalence est démontrée.

**b.** Résolvons  $f(x) = x$  dans  $] -\infty; 5[$ .

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2} = 1 \text{ ou } 4$$

Les deux solutions sont dans l'intervalle  $] -\infty; 5[$ .

**4.** La suite  $(u_n)$  est décroissante, minorée par 1, donc convergente par le théorème de convergence monotone.

Sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell = f(\ell)$

Donc  $\ell$  est solution de  $x = \frac{4}{5-x} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$  ou  $x = 4$

Mais comme  $(u_n)$  est décroissante et  $u_0 = 3$ , la limite est nécessairement  $\ell = 1$

**5.** Et si on change  $u_0$  pour 4 au lieu de 3 ?

On obtient une suite constante, car :

$$u_1 = \frac{4}{5-4} = 4$$

$$u_2 = \frac{4}{5-4} = 4$$

$$u_3 = \text{etc.}$$

Dans ce cas, on a  $u_n = 4$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

---

*Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :*  
[www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/](http://www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/)