Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Centres Etrangers Afrique – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat : www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

1. À chaque tirage, on choisit un jeton parmi 8, et on effectue 3 tirages successifs avec remise.

Il y a donc $8 \times 8 \times 8 = 512$ tirages possibles.

2. a. Pour un tirage sans répétition, les trois numéros sont tous différents.

- Pour le premier numéro : 8 choix
- Pour le deuxième : 7 choix (car un numéro a déjà été tiré)
- Pour le troisième : 6 choix (car deux numéros ont déjà été tirés)

Donc, le nombre de tirages sans répétition est : $8 \times 7 \times 6 = 336$.

2. b. Le nombre de tirages contenant au moins une répétition est donc $512 - 336 = 176$.

3. La variable aléatoire X_1 représente le numéro du premier jeton tiré.
Il y a 8 jetons, chacun numéroté de 1 à 8, et chaque jeton a la même probabilité d'être tiré.

Donc la loi de probabilité de X_1 est :

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{8} \quad \text{pour } k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Autre présentation sous forme de tableau :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X_1 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4. On utilise la formule de l'espérance pour une loi uniforme :

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1 + 2 + \cdots + 8}{8} = \frac{8 \times 9}{2 \times 8} = \frac{72}{16} = 4{,}5$$

5. La variable $S = X_1 + X_2 + X_3$.
Les trois variables sont identiquement distribuées et indépendantes, donc :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 3 \times 4{,}5 = 13{,}5$$

6. On veut déterminer $\mathbb{P}(S = 24)$.
Cela revient à compter le nombre de tirages (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 24$, avec $x_i \in \{1, \dots, 8\}$.

Seul le tirage (8,8,8) réalise l'évènement $(S = 24)$.

Sur les 512 tirages possibles, un seul est favorable à l'évènement.

Donc $\mathbb{P}(S = 24) = \frac{1}{512}$

7. a. On veut déterminer combien de tirages permettent d'obtenir une somme supérieure ou égale à 22, c'est-à-dire :

$$S \in \{22,23,24\}$$

On va les analyser un à un :

- S = 24 :
  Une seule possibilité : $(8,8,8)$

- S = 23 :
  On cherche les triplets (a, b, c) avec $a + b + c = 23$ et $a, b, c \in \{1, \dots, 8\}$

  Après essais manuels ou aidé de la calculatrice, on trouve 3 tirages :

  $(8,8,7)$, $(8,7,8)$, $(7,8,8)$

- S = 22 :

  On cherche les triplets (a, b, c) avec $a + b + c = 22$ et $a, b, c \in \{1, \dots, 8\}$
  Le nombre 22 peut être obtenu avec les 2 sommes suivantes :

  $6 + 6 + 8$ ou $7 + 7 + 8$

  Il y a donc six tirages donnant le nombre 22 :

  $(6,8,8)$ $(8,6,8)$ $(8,8,6)$ $(8,7,7)$ $(7,8,7)$ $(7,7,8)$

Au total, on a bien $1 + 3 + 6 = 10$ tirages.

7. b. Nombre total de tirages possibles : 512 (vu en question 1)

Donc, la probabilité de gagner un lot est :

$$\frac{10}{512} = \frac{5}{256}$$

EXERCICE 2 (5 points)

On étudie la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

1. a. On cherche la limite de $f(x)$ quand $x \to 1$

On a :

- $e^x \to e$ (valeur finie)
- $x - 1 \to 0^-$

Donc :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$$

1. b. Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2. On étudie la limite de $f(x)$ quand $x \to -\infty$

- $e^x \to 0$
- $x - 1 \to -\infty$

Donc :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

3. a. On dérive $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ sur $]-\infty; 1[$

C'est un quotient, donc on applique la formule :

$$f'(x) = \frac{(x-1) \cdot e^x - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1-1)e^x}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

3. b. Sur $]-\infty; 1[$, on a :

- $e^x > 0$
- $(x-1)^2 > 0$

Le signe de $f'(x)$ dépend donc uniquement du numérateur $x-2$

- Si $x < 2$, alors $f'(x) < 0$
- Si $x > 2$, alors $f'(x) > 0$

Mais attention : l'intervalle d'étude est $]-\infty; 1[$, donc on est toujours dans le cas $x < 2$

Conclusion :
Sur tout $]-\infty; 1[$, on a :

$$f'(x) < 0$$

Donc, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. a. On donne la dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$$

On étudie le signe de $f''(x)$:

Sur $]-\infty; 1[$, $e^x > 0$, donc le signe dépend de $x^2 - 4x + 5$ et de $(x-1)^3$

Le discriminant de $x^2 - 4x + 5$ est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

Donc $x^2 - 4x + 5 > 0$ pour tout réel.

Sur $]-\infty; 1[$, on a $(x-1)^3 < 0$

Donc :

$$f''(x) < 0$$

La fonction f est donc concave sur $]-\infty; 1[$

4. b. On cherche l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

On calcule :

- $f(0) = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$
- $f'(0) = \frac{(0-2)e^0}{(0-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2$

Donc, la tangente $\mathcal{T}$ a pour équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = -1 - 2x$$

Équation réduite :

$$y = -2x - 1$$

4. c. On souhaite démontrer que, pour tout $x \in]-\infty; 1[$,

$$e^x \geq (-2x - 1)(x - 1)$$

On divise les deux membres de l'inégalité à démontrer par $x - 1$.
Cela revient à comparer $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ à $-2x - 1$

Or, on a vu que la droite $y = -2x - 1$ est tangente à f en $x = 0$,
et que f est concave sur $]-\infty; 1[$.

Donc f es ten-dessous de ses tangentes sur $]-\infty; 1[$:

$$f(x) \leq -2x - 1$$

$$\frac{e^x}{x - 1} \leq -2x - 1$$

$$e^x \geq (-2x - 1)(x - 1)$$

5. a. On cherche les solutions de $f(x) = -2$, c'est-à-dire :

$$\frac{e^x}{x - 1} = -2 \Rightarrow e^x + 2(x - 1) = 0$$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$, et :

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty; 1[$

5. b. On peut faire quelques essais avec la calculatrice :

- $f(0{,}31) = \frac{e^{0,31}}{0{,}31 - 1} \approx -1{,}98$
- $f(0{,}32) = \frac{e^{0,32}}{0{,}32 - 1} \approx -2{,}03$

On affine avec des essais successifs (ou une méthode dichotomique)
On trouve : $\alpha \in [0{,}31; 0{,}32]$

EXERCICE 3 (6 points)

1. Le point I est le milieu de $[AB]$, donc :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}, 0{,}0\right)$$

Le point J est le milieu de $[CG]$

- C a pour coordonnées $(1{,}1{,}0)$
- G a pour coordonnées $(1{,}1{,}1)$

Donc $J\left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(1{,}1, \frac{1}{2}\right)$

2. On a :

- $E: (0{,}0{,}1)$
- $J: \left(1{,}1, \frac{1}{2}\right)$
  Donc $\overrightarrow{EJ} = \left(1{,}1, -\frac{1}{2}\right)$

Le plan (FHI) est défini par les points F, H, I :

- $F: (1{,}0{,}1)$
- $H: (0{,}1{,}1)$
- $I: \left(\frac{1}{2}, 0{,}0\right)$

On forme deux vecteurs du plan :

$$\overrightarrow{FH} = H - F = (-1{,}1{,}0)$$

$$\overrightarrow{FI} = I - F = \left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)$$

On calcul les produits scalaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FH} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 - \dfrac{1}{2} \times 0 = 0 \\ \overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FI} = -\dfrac{1}{2} \times 1 + 1 \times 0 - \dfrac{1}{2} \times (-1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\overrightarrow{EJ}$ est orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FI}$ qui forment le plan (FHI).
Par conséquent $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

3. Une équation cartésienne s'écrit :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Avec le point F $(x_0, y_0, z_0) = (1{,}0{,}1)$ et le vecteur normal $\overrightarrow{EJ}$ $(a, b, c) = \left(1{,}1, -\frac{1}{2}\right)$

Donc :

$$(x - 1) + (y - 0) - \frac{1}{2}(z - 1) = 0$$
$$\Rightarrow x + y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Rightarrow -2x - 2y + z + 1 = 0$$

4. La droite (EJ) est dirigée par $\overrightarrow{EJ}$ et E est un point de la droite (EJ).

Donc une représentation paramétrique de la droite (EJ) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t = t \\ y = 0 + 1 \times t = t \\ z = 1 - \dfrac{1}{2}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

5. a. On cherche les coordonnées du point K, projeté orthogonal de E sur le plan (FHI).

Il s'agit donc de trouver l'intersection entre la droite (EJ) et le plan.

On remplace les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan :

$$-2x - 2y + z + 1 = 0$$
$$\Rightarrow -2t - 2t + \left(1 - \frac{1}{2}t\right) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow -4t + 1 - \frac{1}{2}t + 1 = 0$$
$$\Rightarrow -\frac{9}{2}t + 2 = 0 \ \Rightarrow t = \frac{4}{9}$$

On remplace ensuite dans la paramétrisation :

$$x = y = \frac{4}{9}, \quad z = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Donc :

$$K\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

5. b. On prend pour base le triangle EFH, et on utilise le point L, milieu de $[EF]$, qui est donné comme étant le projeté orthogonal de I sur le plan (EFH). La hauteur de la pyramide est donc le segment $[IL]$.

Coordonnées des points :

L, milieu de $[EF]$, a pour coordonnées :

$$L = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0,1\right)$$

On a donc :

$$\overrightarrow{IL} = L - I = (0,0,1) \Rightarrow IL = 1$$

Le triangle EFH est rectangle en E, de côtés EF et EH de longueur 1.
Son aire est donc :

$$\text{Aire}_{EFH} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

On applique la formule du volume d'une pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire base} \times \text{Hauteur} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$

Le volume de la pyramide $EFHI$ est donc :

$$\frac{1}{6}\ \text{cm}^3$$

5. c. On utilise le fait que la pyramide $EFHI$ a pour base le triangle FHI, et pour sommet le point E.

Dans cette configuration, la hauteur de la pyramide est la distance du point E au plan (FHI), c'est-à-dire la longueur EK.

On calcule :

$$\overrightarrow{EK} = K - E = \left(\frac{4}{9} - 0, \frac{4}{9} - 0, \frac{7}{9} - 1\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{2}{9}\right)$$

Donc :

$$EK = \| \overrightarrow{EK} \| = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{1}{9}\sqrt{16+16+4} = \frac{1}{9}\sqrt{36} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

On utilise maintenant la formule du volume d'une pyramide :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{FHI} \times EK$$

On a vu à la question précédente que $V = \frac{1}{6}$ cm^3, donc :

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{FHI} \times \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Aire}_{FHI} = \frac{1/6 \times 3}{2/3} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

L'aire du triangle FHI est donc $\frac{3}{4}$ cm^2.

EXERCICE 4 (4 points)

Partie A

1.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \quad \text{pour tout } x \in [0; +\infty[$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2.

$$f(x) - x = \sqrt{x+1} - x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - x = \frac{\left(\sqrt{x+1} - x\right)\left(\sqrt{x+1} + x\right)}{\sqrt{x+1} + x}$$

On reconnaît une identité remarquable au numérateur : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$\left(\sqrt{x+1} - x\right)\left(\sqrt{x+1} + x\right) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - x^2 = x + 1 - x^2 = -x^2 + x + 1$$

Donc :

$$\sqrt{x+1} - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$$

3.

$$f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x$$

On élève au carré (car $x \geq 0$) :

$$\Leftrightarrow x + 1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

On résout cette équation :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Le seul de ces deux réels appartenant à $[0; +\infty[$ est :

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

C'est donc l'unique solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$.

Partie B

1. On veut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

Initialisation :
$u_0 = 5$, donc $u_1 = \sqrt{5+1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

On a bien :

$$1 \leq u_1 \leq u_0$$

Hérédité :
On suppose que $1 \leq u_n \leq u_{n-1}$. On montre que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

- Comme $u_n \geq 1$, alors $u_n + 1 \geq 2$, donc $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \geq \sqrt{2} > 1$
- De plus, comme $f(x) = \sqrt{x+1}$ est croissante, et que $f(x) \leq x$ pour $x \geq \ell$, et comme $u_0 = 5 > \ell$, on peut montrer par récurrence que $u_n \geq \ell$, donc $u_{n+1} \leq u_n$

Conclusion :

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La suite (u_n) est bornée inférieurement par 1 et décroissante, donc elle est convergente.

3. Par passage à la limite dans la relation de récurrence :

$$\lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\ell) \Rightarrow \ell = f(\ell)$$

Donc ℓ est solution de $f(x) = x$ (théorème du point fixe), dont on a vu à la question A.3 que la seule solution est :

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

La suite converge donc vers :

$$\boxed{\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

4. a. On veut la valeur renvoyée par seuil(2), donc on cherche combien d'itérations il faut pour que $| u_n - \ell | < 10^{-2}$

Par exécution à la calculatrice, on trouve :

$$\text{seuil(2)} = 5$$

4. b. Cela signifie que, à partir du rang $n = 9$, la valeur u_n est à moins de 10^{-4} de la limite ℓ.

Autrement dit, il faut 9 itérations pour que l'erreur d'approximation soit inférieure à $0{,}0001$.

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/