Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Centres Étrangers – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. La fonction f est définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}$$

Pour calculer sa dérivée, on utilise la formule du quotient :

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

avec :

- $u(x) = 0{,}96x \Rightarrow u'(x) = 0{,}96$
- $v(x) = 0{,}93x + 0{,}03 \Rightarrow v'(x) = 0{,}93$

On applique la formule :

$$f'(x) = \frac{0{,}96(0{,}93x + 0{,}03) - 0{,}96x(0{,}93)}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

On développe le numérateur :

$$0{,}96 \times 0{,}93x + 0{,}96 \times 0{,}03 - 0{,}96x \times 0{,}93 = 0{,}8928x + 0{,}0288 - 0{,}8928x = 0{,}0288$$

Ainsi, on obtient :

$$f'(x) = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

2. On observe que $f'(x)$ est toujours strictement positif sur $[0; 1]$ car :

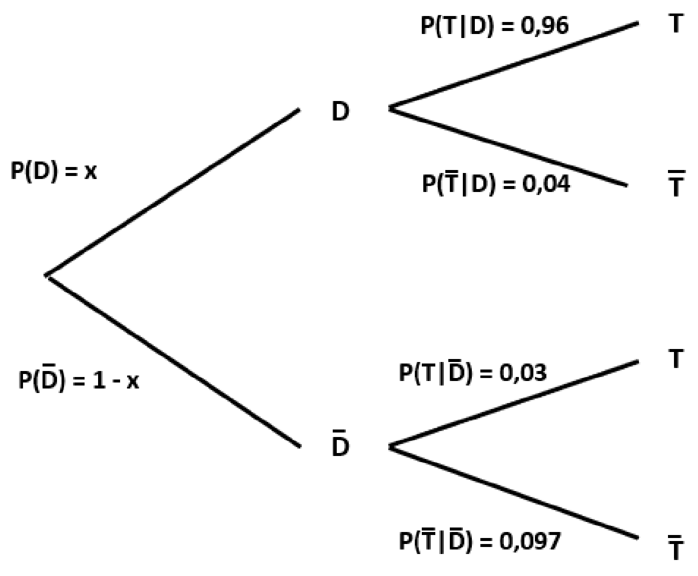
- Le numérateur $0{,}0288$ est strictement positif.
- Le dénominateur $(0{,}93x + 0{,}03)^2$ est strictement positif car il s'agit d'un carré.

Par conséquent, $f'(x) > 0$ pour tout x dans $[0; 1]$.

Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie B

1. L'arbre de probabilité est structuré comme suit :



2. Calcul de la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif :

$$P(D \cap T) = P(D) \times P(T \mid D) = x \times 0{,}96 = 0{,}96x$$

3. Calcul de la probabilité de T :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(T \cap \overline{D})$$
$$= P(D \cap T) + P(\overline{D}) \times P(T \mid \overline{D})$$
$$= 0{,}96x + (1 - x)0{,}03$$
$$= 0{,}96x + 0{,}03 - 0{,}03x$$
$$= 0{,}93x + 0{,}03$$

4. La probabilité conditionnelle est donnée par :

$$P(D \mid T) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}$$

En utilisant les résultats précédents avec $x = 0{,}05$:

$$P(D \mid T) = \frac{0{,}96 \times 0{,}05}{0{,}93 \times 0{,}05 + 0{,}03}$$

Cela correspond exactement à $f(0{,}05)$, d'après la fonction définie en Partie A.
On fait le calcul :

$$f(0{,}05) = \frac{0{,}96 \times 0{,}05}{0{,}93 \times 0{,}05 + 0{,}03} = \frac{0{,}048}{0{,}0465 + 0{,}03} = \frac{0{,}048}{0{,}0765} \approx 0{,}63$$

Donc :

$$P(D \mid T) \approx 0{,}63$$

5. **a.** On cherche x tel que :

$$P(D \mid T) \geq 0{,}9$$

$$\frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} \geq 0{,}9$$

En multipliant des deux côtés par $(0{,}93x + 0{,}03)$:

$$0{,}96x \geq 0{,}9(0{,}93x + 0{,}03)$$

$$0{,}96x \geq 0{,}837x + 0{,}027$$

$$0{,}96x - 0{,}837x \geq 0{,}027$$

$$0{,}123x \geq 0{,}027$$

$$x \geq \frac{0{,}027}{0{,}123} \approx 0{,}22$$

Donc, il faut que x soit au moins 0,22 (arrondi au centième).

b. Si seuls les sportifs les plus performants sont testés, on suppose que ces sportifs ont une proportion x de dopage plus élevée que l'ensemble des sportifs.

Comme la fonction $f(x)$ est croissante, cela signifie que la valeur prédictive positive du test $P(D \mid T)$ augmente.

Ainsi, cibler les sportifs les plus performants augmente la fiabilité du test, car il y a plus de chances qu'un test positif corresponde à un sportif réellement dopé.

EXERCICE 2 (5 points)

1. a. On cherche les solutions de l'équation :

$$2xe^{-x} = x$$

Si $x = 0$, on a $2 \times 0 \times e^0 = 0$, donc $x = 0$ est solution.

Pour $x \neq 0$, on peut diviser par x et on obtient :

$$2e^{-x} = 1$$
$$e^{-x} = \frac{1}{2}$$
$$-x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$x = \ln(2)$$

Les solutions sont donc :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \ln(2)$$

b. On dérive $f(x) = 2xe^{-x}$ en utilisant la formule du produit :

$$f'(x) = 2e^{-x} + 2x(-e^{-x})$$

$$f'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x}$$

$$f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$$

c. Le signe de $f'(x)$ dépend de $1 - x$:

- Si $x < 1$ alors $f'(x) > 0$ donc f est croissante.
- Si $x > 1$ alors $f'(x) < 0$ donc f est décroissante.
- Pour $x = 1$, $f'(1) = 0$, donc f atteint un maximum en $x = 1$.

Calcul de $f(1)$:

$$f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} = 2e^{-1} \approx 0{,}7$$

Tableau de variations :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$

2. a. Montrons que $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ par récurrence

- Initialisation : Pour $n = 0$

$$u_0 = 0{,}1$$

$$u_1 = f(u_0) = f(0{,}1) \approx 0{,}18$$

  On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$

- Hérédité : Supposons $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$
  - Comme $f(x)$ est croissante sur $[0; 1]$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est toujours plus grand que u_n.
  - Comme $f(x) \leq 1$ pour $x \in [0; 1]$, on a $u_{n+1} \leq 1$.
- Conclusion : Par récurrence, la suite est bien croissante et bornée.

b. Une suite croissante et majorée converge.
Donc (u_n) converge.

3. La suite (u_n) converge vers une limite ℓ, qui vérifie :

$$\ell = f(\ell)$$

$$\ell = 2\ell e^{-\ell}$$

Si $\ell \neq 0$, on divise par ℓ et on retrouve :

$$2e^{-\ell} = 1$$

$$e^{-\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\ell = \ln(2)$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\ln(2)$.

4. a. Montrons que $\ln(2) - u_n \geq 0$

On sait que la suite est croissante et bornée par $\ln(2)$, donc :

$$u_n \leq \ln(2)$$

$$\ln(2) - u_n \geq 0$$

b. On veut un script qui calcule u_n jusqu'à ce que u_n soit proche de $\ln(2)$ à 10^{-4} près.

Voici le script complété :

```
from math import log, exp

def seuil():
    n = 0
    u = 0.1
    while log(2) - u > 0.0001:  #Tant que la précision n'est pas atteinte
        n = n + 1
        u = 2 * u * exp(-u)  #Mise à jour de u_n
    return (u, n)
```

Note : Le sujet comporte une erreur avec un appel à la fonction « ln(2) » qui n’existe pas sous Python. Nous avons corrigé avec la bonne écriture « log(2) ».

c. En exécutant le programme, on trouve que la valeur de n est 11.

EXERCICE 3 (5 points)

1. On cherche les fonctions y qui vérifient :

$$y' = y$$

Si y est une solution constante, alors sa dérivée est nulle :

$$y' = 0$$

$$0 = y$$

La seule solution constante est donc :

$$y = 0$$

2. L'équation différentielle est une équation classique de la forme $y' = ay$ avec $a = 1$.
La solution générale est donnée par :

$$y(x) = Ce^x$$

où C est une constante réelle.

3. On cherche à résoudre l'équation différentielle $(E): y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$

On calcule la dérivée de $h(x)$:

$$h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$$

On vérifie si cette fonction satisfait (E) :

$$h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(x) + \cos(x) = \big(2\cos(x) + \sin(x)\big) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(x) + \cos(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(x) + \cos(x) = \cos(x) - 2\sin(x) = h'(x)$$

On obtient bien une égalité, donc $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$ est bien une solution particulière.

4. On considère une fonction $f(x)$ solution de (E).
On pose $j(x) = f(x) - h(x)$, alors :

$$j'(x) = f'(x) - h'(x)$$

Or, d'après (E) :

$$f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

et on sait que :

$$h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$$

Ainsi :

$$j'(x) = f'(x) - h'(x) = \big(f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)\big) - \big(h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)\big)$$

$$j'(x) = f(x) - h(x)$$

$$j'(x) = j(x)$$

On retrouve bien l'équation $j'(x) = j(x)$.

5. L'équation $j'(x) = j(x)$ a pour solution générale :

$$j(x) = Ce^x$$

Donc les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = h(x) + j(x) = 2\cos(x) + \sin(x) + Ce^x$$

6. On impose $g(0) = 0$:

$$2\cos(0) + \sin(0) + Ce^0 = 0$$

$$2 \times 1 + 0 + C \times 1 = 0$$

$$2 + C = 0$$

$$C = -2$$

La solution particulière vérifiant $g(0) = 0$ est donc :

$$g(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - 2e^x$$

7. On réalise le calcul :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x)\big)\, dx$$

$$= [-2e^x - \cos(x) + 2\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Evaluation des bornes :

- Pour $x = \frac{\pi}{2}$:

$$-2e^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2 \times 1 = -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2$$

- Pour $x = 0$:

$$-2e^0 - \cos(0) + 2\sin(0) = -2 \times 1 - 1 + 2 \times 0 = -2 - 1 = -3$$

Donc :

$$I = \left(-2e^{\frac{\pi}{2}} + 2\right) - (-3)$$

$$= -2e^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3 = 5 - 2e^{\frac{\pi}{2}}$$

EXERCICE 4 (5 points)

1. On calcule les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-0 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les points A, B, C sont alignés si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \vec{AC} = k\vec{AB}$$

On regarde les coordonnées :

$$3 = k \times 1, \quad -1 = k \times 3, \quad 0 = k \times (-2)$$

La dernière équation donne $k = 0$, ce qui est incohérent avec $k = \frac{3}{1} = 3$ dans la première.

Donc, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, et les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. a. Le vecteur normal au plan doit être orthogonal aux vecteurs directeurs du plan. On calcule les produits scalaires :

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times (-2) = 1 + 9 - 10 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 3 + 3 \times (-1) + 5 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est bien orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, donc il est normal au plan (ABC).

b. Une équation cartésienne d'un plan ayant pour vecteur normal (a, b, c) et passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ est de la forme :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

On remplace par $\vec{n}(1,3,5)$ et $A(-2,0,2)$ et on obtient :

$$1(x + 2) + 3(y - 0) + 5(z - 2) = 0$$

$$x + 2 + 3y + 5z - 10 = 0$$

$$x + 3y + 5z - 8 = 0$$

L'équation du plan (ABC) est donc :

$$x + 3y + 5z = 8$$

c. Le point $D(0,0,3)$ appartient-il au plan ?
On teste son appartenance en remplaçant dans l'équation du plan :

$$0 + 3 \times 0 + 5 \times 3 = 15 \neq 8$$

Le point D n'appartient pas au plan (ABC), donc les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

3. a. La droite $\mathcal{D}_1$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

Le vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\vec{n} = (1,3,5)$, qui est orthogonal au plan (ABC) d'après la question 2)a).

Pour $t = 0$, on a :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \times 0 = 0 \\ z = 3 + 5 \times 0 = 3 \end{cases}$$

On reconnait les coordonnées du point D, donc D appartient à la droite $\mathcal{D}_1$.

Par conséquent, $\mathcal{D}_1$ est bien une hauteur du tétraèdre issue de D.

b. On résout le système $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$:

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 5 - 6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3(1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5(1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 3 + 5 + 15s = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s = 1 + 3 \times {}^{-2}/_{7} = {}^{1}/_{7} \\ s = {}^{-4}/_{14} = {}^{-2}/_{7} \\ s = {}^{-6}/_{21} = {}^{-2}/_{7} \end{cases}$$

Il y a une seule solution au système, donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.

On cherche les coordonnées du point d'intersection en remplaçant t par ${}^{1}/_{7}$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}_1$:

$$\begin{cases} x = {}^{1}/_{7} \\ y = 3 \times {}^{1}/_{7} = {}^{3}/_{7} \\ z = 3 + 5 \times {}^{1}/_{7} = {}^{26}/_{7} \end{cases}$$

Les coordonnées du point d'intersection sont donc $\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{26}{7}\right)$.

4. a. Avec les questions précédentes, on sait que H est donc à l'intersection de la droite $\mathcal{D}_1$ avec le plan (ABC), et que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

Les coordonnées du point H doivent donc vérifier l'équation cartésienne du plan (ABC) et l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.

Ainsi :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ x + 3y + 5z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ 35t = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t = {}^{-1}/_{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = {}^{-1}/_{5} \\ y = {}^{-3}/_{5} \\ z = 2 \\ t = {}^{-1}/_{5} \end{cases}$$

Donc H a pour coordonnées :

$$H\left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 2\right)$$

b. Puisque H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC), alors la distance du point D au plan (ABC) est la longueur DH.

$$\mathrm{DH}^2 = \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} - \mathbf{0}\right)^2 + \left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} - \mathbf{0}\right)^2 + (\mathbf{2} - \mathbf{3})^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}} + \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{25}} + 1 = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{25}}$$

Donc :

$$\mathrm{DH} = \sqrt{\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{25}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{35}}}{\mathbf{5}} \approx 1{,}18$$

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/