

Corrigé du bac général 2024

Spécialité Mathématiques – Amérique du Nord – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. On relève les données de l'énoncé :

$$P(N) = 22,86\% = 0,2286$$

$$P_N(R) = 8,08\% = 0,0808$$

$$P_{\bar{N}}(R) = 1,27\% = 0,0127$$

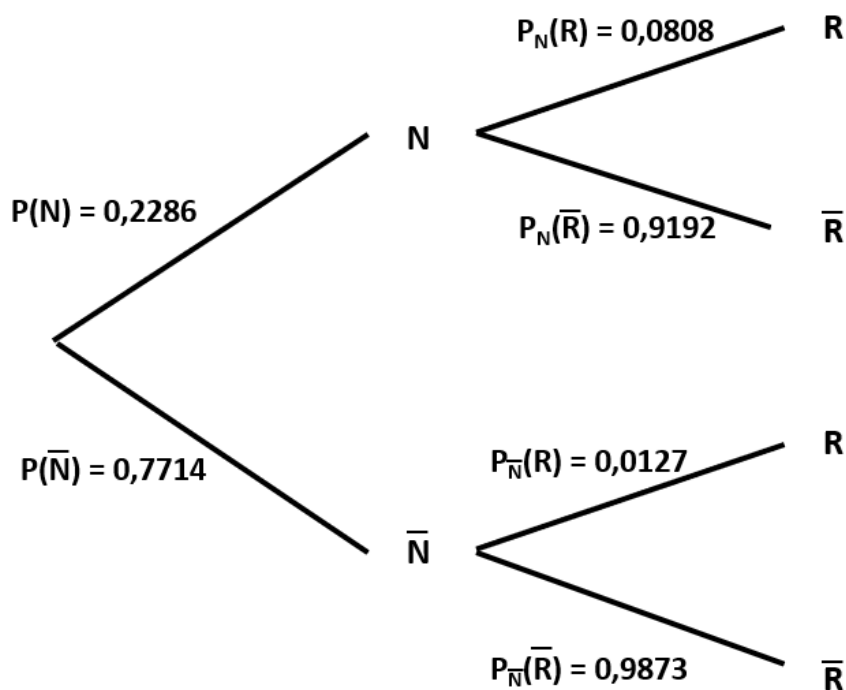
On complète avec les probabilités complémentaires :

$$P(\bar{N}) = 1 - P(N) = 0,7714$$

$$P_N(\bar{R}) = 1 - P_N(R) = 0,9192$$

$$P_{\bar{N}}(\bar{R}) = 1 - P_{\bar{N}}(R) = 0,9873$$

Cela donne l'arbre suivant :



2. $P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R) = 0,2286 \times 0,0808 = 0,01846$

3. $P(R) = P(N \cap R) + P(\bar{N} \cap R)$

On sait que : $P(N \cap R) = 0,01846$

On calcule : $P(\bar{N} \cap R) = P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(R) = 0,7714 \times 0,0127 = 0,00980$

Donc : $P(R) = 0,01846 + 0,00980 = 0,0282$

4.

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{0,01846}{0,0282} = 0,6546$$

Partie B

1. X suit une loi binominale $B(n=500 ; p=0,65)$.

2.

$$P(X = 325) = \binom{500}{325} \times 0,65^{325} \times (1 - 0,65)^{500-325} = 0,0374$$

3. $P(X \geq 325) = 1 - P(X \leq 324) = 1 - 0,4794 = 0,5206$

La probabilité qu'au moins 325 véhicules soient neufs parmi le lot de 500 véhicules est d'environ 0,5206.

Partie C

1. $p_n = (1 - 0,65)^n = 0,35^n$

2. On cherche :

$$q_n \geq 0,9999$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 1) \geq 0,9999$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,9999$$

$$\Leftrightarrow P(X = 0) \leq 1 - 0,9999$$

$$\Leftrightarrow p_n \leq 0,0001$$

$$\Leftrightarrow 0,35^n \leq 0,0001$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,35^n) \leq \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,35) \leq \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,35)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 8,8$$

Ainsi, il faut prendre au minimum $n = 9$.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Coordonnées des points :

$$F(3,0,1)$$

$$H(0,1,1)$$

$$M\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right)$$

2.a. On a $\overrightarrow{HM} \left(\frac{3}{2}, 0, -1\right)$, $\overrightarrow{HF} (3, -1, 0)$ et $\vec{n} (2, 6, 3)$.

$$\text{Donc } \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = 2 \times \frac{3}{2} + 6 \times 0 + 3 \times (-1) = 0.$$

$$\text{Et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{HF} = 2 \times 3 + 6 \times (-1) + 3 \times 0 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF). Ainsi, on peut conclure que le vecteur \vec{n} est normal à ce plan.

2.b. Puisque \vec{n} est normal à (HMF), le plan HMF a donc une équation cartésienne qui suit la forme suivante : $2x + 6y + 3z + d = 0$

On cherche la valeur du coefficient d en utilisant les coordonnées d'un point du plan, par exemple le point $H(0,1,1)$:

$$\begin{aligned} 2x_H + 6y_H + 3z_H + d &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 1 + d &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 + 6 + 3 + d &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= -9 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation cartésienne (HMF) : $2x + 6y + 3z - 9 = 0$

2.c. Un vecteur normal au plan P est : $\vec{m} (5, 15, -3)$.

\vec{m} n'est pas colinéaire au vecteur \vec{n} qui est normal au plan (HMF).

Par conséquent, les plans P et (HMF) ne sont pas parallèles.

3. On connaît les coordonnées suivantes : $D(0, 1, 0)$ et $G(3, 1, 1)$.

Donc on en déduit : $\overrightarrow{DG}(3, 0, 1)$.

Une représentation paramétrique de la droite (DG) est donc : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + 6y + 3z - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 6t + 6 + 3t - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 9t = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ t = 1/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1/3 \\ t = 1/3 \end{cases}$$

Le point N a donc pour coordonnées : $N(1, 1, \frac{1}{3})$.

5. On vérifie tout d'abord que le point R appartient au plan (HMF) :

$$2x_R + 6y_R + 3z_R - 9 = 2 \times 3 + 6 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} - 9 = 0. \text{ C'est le cas.}$$

On vérifie ensuite si le vecteur \overrightarrow{RG} est un vecteur normal au plan (HMF).

$$\overrightarrow{RG} = \begin{pmatrix} 3 - 3 = 0 \\ \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{n}(2, 6, 3)$, car sa première coordonnée n'est pas 0.

Nous pouvons conclure que le point R n'est pas le projeté orthogonal de G sur le plan (HMF).

EXERCICE 3 (6 points)

1. Rappel de la fonction $g : g(x) = 2x - x^2$

La fonction g est dérivable sur $[0 ; 1]$ car il s'agit d'une fonction polynôme.

$$g'(x) = 2 - 2x$$

Or $\begin{cases} 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ 2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \end{cases}$

Donc g est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

Par ailleurs, on a : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = 1 \end{cases}$

2.

$$u_1 = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$u_2 = g\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = \frac{24}{16} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

3. On réalise la démonstration par récurrence.

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{3}{4}$

Donc $0 < u_0 < u_1 < 1$

Hérédité :

Supposons que $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$

On a :

$$\begin{aligned} 0 < u_n < u_{n+1} < 1 \\ \Leftrightarrow g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1) \\ \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1 \end{aligned}$$

Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour toute valeur n .

4. Grâce aux questions précédentes, on sait que la suite u_n est croissante et majorée par 1.

Par conséquent, elle converge donc vers une limite $l \leq 1$.

5. On a $u_{n+1} = g(u_n)$ et g est continue sur $[0 ; 1]$.

Par conséquent, l est solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} l &= g(l) \\ \Leftrightarrow l &= 2l - l^2 \\ \Leftrightarrow l^2 - l &= 0 \\ \Leftrightarrow l(l - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow l &= 0 \text{ ou } l = 1 \end{aligned}$$

Puisque u_n est strictement croissante et que $u_0 = \frac{1}{2} > 0$, alors seule la solution $l = 1$ convient.

6.

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \ln(1 - u_{n+1}) \\ &= \ln(1 - 2u_n + u_n^2) \\ &= \ln((1 - u_n)^2) \\ &= 2 \ln(1 - u_n) \\ &= 2v_n\end{aligned}$$

Ainsi, la suite v_n est géométrique de raison 2.

Son premier terme est $v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

7. On déduit de la question précédente que $v_n = v_0 \times 2^n = -\ln(2) \times 2^n$

8. On a :

$$\begin{aligned}v_n &= \ln(1 - u_n) \\ \Leftrightarrow e^{v_n} &= e^{\ln(1-u_n)} \\ \Leftrightarrow 1 - u_n &= e^{v_n} \\ \Leftrightarrow u_n &= 1 - e^{-\ln(2) \times 2^n}\end{aligned}$$

Or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) \times 2^n = -\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\ln 2 \times 2^n} = 0$

Et par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

9.

```
def seuil() :  
    n=0  
    u=0.5  
    while u<0.95 :  
        n=n+1  
        u=2*u-u*u  
    return n
```

EXERCICE 4 (4 points)

1. On veut :

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow a \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ car } a > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

Ainsi, l'abscisse du point d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses est $x = 1$.

2. La fonction F est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et différence de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$F'(x) = a \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \right) = a(\ln(x) + 1 - 1) = f(x)$$

La fonction F est bien une primitive de f sur l'intervalle étudié.

3. L'aire du domaine, notée D , est donnée par :

$$\begin{aligned} D &= \int_1^{x_0} f(x) dx = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1) \\ &= a(x_0 \ln(x_0) - x_0) - a(1 \ln(1) - 1) = a(x_0 \ln(x_0) - x_0 + 1) \end{aligned}$$

4. On détermine l'équation de la T , la tangente à la courbe C au point d'abscisse x_0 .

$$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \frac{a}{x_0} \times (x - x_0) + a \ln(x_0)$$

$$y = \frac{a}{x_0} \times x - a + a \ln(x_0)$$

Le point A est le point de la tangente T d'abscisse $x_0 = 0$.

Donc :

$$y_A = \frac{a}{x_0} \times x_A - a + a \ln(x_0) = -a + a \ln(x_0)$$

Le point B est le projeté orthogonal de M , donc $x_B = 0$

Et :

$$y_B = y_M = f(x_M) = f(x_0) = a \ln(x_0)$$

Puisque $a > 0$, on a donc :

$$AB = |y_B - y_A| = |a \ln(x_0) - (-a + a \ln(x_0))| = |a| = a$$

Ainsi, la longueur AB est égale à une constante.

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :

www.sujetdebac.fr/Annales/specialites/spe-mathematiques/