Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Amérique du Nord – Jour 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site sujetdebac.fr

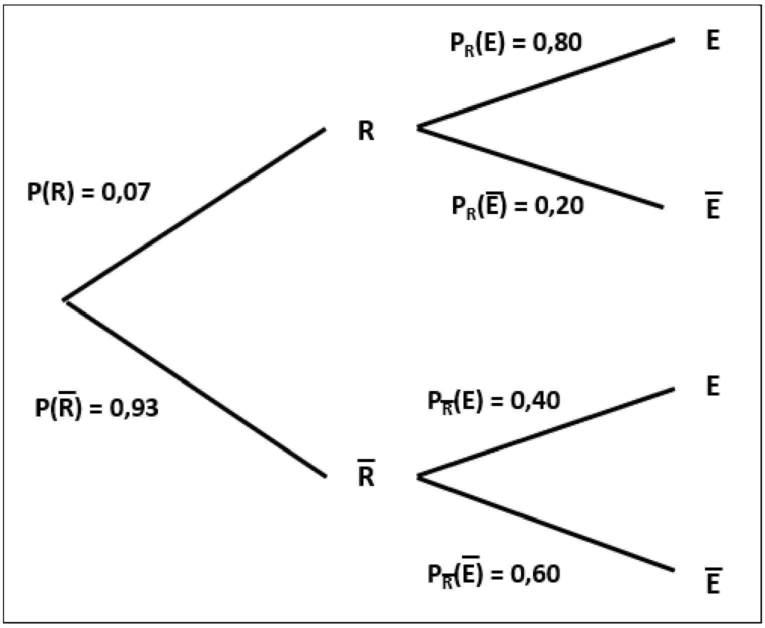
Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. On construit un arbre de probabilités avec deux premiers embranchements :

- R : tirer un objet rare avec $P(R) = 0{,}07$
  - E | R : c'est une épée sachant que c'est rare, $P(E \mid R) = 0{,}80$
  - $\bar{E} \mid R$: un bouclier rare, $P(\bar{E} \mid R) = 0{,}20$
- $\bar{R}$: tirer un objet commun avec $P(\bar{R}) = 0{,}93$
  - E | $\bar{R}$: une épée commune, $P(E \mid \bar{R}) = 0{,}40$
  - $\bar{E} \mid \bar{R}$: un bouclier commun, $P(\bar{E} \mid \bar{R}) = 0{,}60$



On réalise le calcul demandé :

$$P(R \cap E) = P(R) \times P(E \mid R) = 0{,}07 \times 0{,}80 = 0{,}056$$

2. Probabilité de tirer une épée :

$$P(E) = P(R \cap E) + P(\bar{R} \cap E) = 0{,}07 \times 0{,}80 + 0{,}93 \times 0{,}40 = 0{,}056 + 0{,}372 = 0{,}428$$

3. On cherche $P(R \mid E)$, la probabilité que l'objet soit rare sachant que c'est une épée. On applique la formule de probabilité conditionnelle :

$$P(R \mid E) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}056}{0{,}428} \approx 0{,}131$$

Partie B

1. On répète 30 fois un tirage indépendant avec deux issues possibles : obtenir un objet rare (succès) ou non (échec), avec $p = 0{,}07$. Donc :

- $X \sim \mathcal{B}(30; 0{,}07)$
- Espérance : $\mathbb{E}(X) = 30 \times 0{,}07 = 2{,}1$

2. Cela se calcule à l'aide de la loi binomiale :

$$P(X < 6) = \sum_{k=0}^{5} \binom{30}{k} \cdot (0{,}07)^k \cdot (0{,}93)^{30-k}$$

À la calculatrice (mode examen activé) :

$$P(X < 6) \approx 0{,}984$$

3. On cherche la plus grande valeur k telle que $P(X \geq k) \geq 0{,}5$

Cela revient à chercher le plus grand k tel que $P(X < k) < 0{,}5$

À la calculatrice, on trouve que :

- $P(X \geq 2) \approx 0{,}650$
- $P(X \geq 3) \approx 0{,}455$

Donc, la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0{,}5$ est 2.

<u>Interprétation</u> : dans au moins 50 % des cas, le joueur obtient au moins 2 objets rares en 30 tirages.

4. On veut déterminer le plus petit entier N tel que la probabilité d'avoir au moins un objet rare parmi les N tirages soit ≥ 0,95.

On note :

$$P(\text{au moins un rare}) = 1 - P(\text{aucun rare}) = 1 - (1 - 0{,}07)^N \geq 0{,}95$$

Donc :

$$(0{,}93)^N \leq 0{,}05$$

On résout :

$$N\ln(0{,}93) \leq \ln(0{,}05) \Rightarrow N \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)}$$

$$N \geq \frac{-2{,}996}{-0{,}072} \approx 41{,}6$$

Donc $N_{\text{min}} = 42$

EXERCICE 2 (4 points)

1. On cherche une représentation paramétrique de la droite passant par les points $A(1;0;3)$ et $B(4;1;0)$.

Le vecteur directeur est :

$$\overrightarrow{AB} = (4-1; 1-0; 0-3) = (3;1;-3)$$

Une représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Réponse correcte : **c**

2. La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

On teste les points :

- $M(7;6;6)$:
  Pour $x = 7 \Rightarrow t = 1$
  Alors $y = 6 \times 1 = 6$ et $z = 4 - 2 \times 1 = 2 \neq 6$. Donc M n'appartient pas à d.

- $N(3;6;4)$:
  Pour $x = 3 \Rightarrow t = 0$
  Alors $y = 0$, or ici $y = 6$. Donc N n'appartient pas à d.

- $P(4;6;-2)$:
  Pour $y = 6 \Rightarrow t = 1$
  Alors $x = 3 + 4 = 7 \neq 4$. Donc P n'appartient pas à d.

- $R(-3;-9;7)$:
  Pour $y = -9 \Rightarrow t = -1{,}5$
  Alors :

$$x = 3 + 4 \times (-1{,}5) = 3 - 6 = -3$$

$$z = 4 - 2 \times (-1{,}5) = 4 + 3 = 7$$

Le point vérifie bien toutes les coordonnées.

Réponse correcte : **d**

3. La droite d a pour vecteur directeur : $\vec{u} = (4; 6; -2)$
La droite d' a pour représentation :

$$\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -1 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Donc son vecteur directeur est : $\vec{v} = (3; -2; 1)$

On cherche à savoir si les droites sont coplanaires, parallèles, sécantes ou non coplanaires.
On calcule le produit mixte des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$, où $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur reliant un point de d (par exemple $A = (3; 0; 4)$) à un point de d' (par exemple $B = (-2; -1; 1)$)

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 3; -1 - 0; 1 - 4) = (-5; -1; -3)$$

On calcule :

$$\text{mixte} = \det\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est non nul (on le vérifie si besoin), donc les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.
Les droites ne sont donc pas coplanaires.

Réponse correcte : **b**

4. Le plan P est perpendiculaire à la droite d, donc son vecteur normal est le vecteur directeur de d, soit $\vec{u} = (4; 6; -2)$.

On cherche une équation du plan de la forme :

$$4(x - 2) + 6(y - 1) - 2(z - 0) = 0 \Rightarrow 4x + 6y - 2z - 14 = 0$$

On peut simplifier cette équation :

$$2x + 3y - z - 7 = 0$$

Réponse correcte : **a**

EXERCICE 3 (5 points)

On étudie la fonction :

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x} \quad \text{définie sur }]0; +\infty[$$

Partie A : lectures graphiques

1. On lit graphiquement la pente de la tangente T au point $A(1; -1)$. Cette tangente passe par $A(1; -1)$ et $B(0; -4)$, donc on peut utiliser la formule :

$$f'(1) = \frac{-1 - (-4)}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Équation réduite de la tangente T :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) - 1 = 3x - 4$$

2. D'après la courbe :

- La fonction semble concave sur $]0; 1[$
- Elle semble convexe sur $]1; +\infty[$

Le point A semble être un point d'inflexion (changement de convexité).

Partie B : étude analytique

1. On commence par simplifier l'expression :

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x} = x \cdot 2\ln(x) - \frac{1}{x} = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$$

Limite en $+\infty$:

- $2x\ln(x) \to +\infty$
- $\frac{1}{x} \to 0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Limite en 0 :

- $x\ln(x) \to 0$
- $\frac{1}{x} \to +\infty$

Donc : $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

2.a. On dérive la fonction $f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$

On utilise la formule $(x\ln x)' = \ln x + 1$, donc :

$$f'(x) = 2(\ln x + 1) + \frac{1}{x^2} = 2\ln x + 2 + \frac{1}{x^2}$$

2.b. On admet que f est deux fois dérivable. On dérive $f'(x)$ pour obtenir $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2 - 2}{x^3} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x^3}$$

3.a. On étudie le signe de $f''(x)$:

- Le dénominateur $x^3 > 0$ pour $x > 0$
- Le numérateur change de signe en $x = 1$

Donc :

- $f''(x) < 0$ sur $]0; 1[$ → fonction concave.
- $f''(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ → fonction convexe.

Il y a bien un point d'inflexion en $x = 1$

3.b. On étudie la variation de f'. On sait que :

$$f'(x) = 2\ln x + 2 + \frac{1}{x^2}$$

On ne calcule pas directement f'' pour ça, car ce serait trop lourd ici.
Mais on peut regarder les valeurs de $f'(x)$ pour connaître le signe de la dérivée :

- $f'(x) > 0$ sur tout $]0; +\infty[$, car :
  - $2\ln x \to -\infty$ en 0, mais compensé par $\frac{1}{x^2} \to +\infty$
  - Pour tout $x > 0$, on a $f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

4.a. On cherche à montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$

On a vu que :

- $f(x) \to -\infty$ quand $x \to 0$

- $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$
- f est continue et strictement croissante

Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que :

$$f(\alpha) = 0$$

4.b. À la calculatrice, on trouve :

$$\alpha \approx 1{,}24$$

On veut montrer que :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

On reprend l'expression de $f(x)$ sous forme :

$$f(x) = 2x\ln x - \frac{1}{x}$$

Posons $x = \alpha$ tel que $f(\alpha) = 0$, donc :

$$2\alpha\ln\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

$$2\alpha^2\ln\alpha = 1$$

$$\ln\alpha = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\alpha = \exp\left(\frac{1}{2\alpha^2}\right)$$

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Ce qui est bien l'égalité demandée.

EXERCICE 4 (6 points)

On considère, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\sin(x)\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)\,dx$$

1. Pour $n = 0$, on a :

$$I_0 = \int_0^\pi e^0 \sin(x)\, dx = \int_0^\pi \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

2.a. Pour tout n, la fonction $e^{-nx}\sin(x)$ est positive sur $[0;\pi]$ car $e^{-nx} > 0$ et $\sin(x) \geq 0$ sur cet intervalle, donc :

$$I_n \geq 0$$

2.b. Pour tout n, $e^{-(n+1)x} < e^{-nx}$ sur $]0;\pi]$.

Et comme $\sin(x) \geq 0$, on a :

$$e^{-(n+1)x}\sin(x) \leq e^{-nx}\sin(x) \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

Donc la suite (I_n) est décroissante.

2.c. La suite (I_n) est positive et décroissante, donc elle est convergente.

3.a. On veut majorer I_n. Or, sur $[0;\pi]$, on a $\sin(x) \leq 1$, donc :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx}\sin(x)\, dx \leq \int_0^\pi e^{-nx} \cdot 1\, dx = \int_0^\pi e^{-nx}\, dx$$

3.b. Calcul de l'intégrale majorante :

$$\int_0^\pi e^{-nx}\, dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^\pi = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

3.c. On sait que :

$$I_n \leq \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

Or lorsque $n \to +\infty$, alors $e^{-n\pi} \to 0$, donc :

$$\frac{1 - e^{-n\pi}}{n} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

4.a. On intègre $I_n = \int_0^\pi e^{-nx}\sin(x)dx$ par parties de deux façons :

<u>Première intégration par parties :</u>

Posons :

- $u = \sin(x), u' = \cos(x)$
- $v' = e^{-nx}$, donc $v = \frac{e^{-nx}}{-n}$

Alors :

$$I_n = \left[\frac{-\sin(x)}{n}e^{-nx}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi e^{-nx}\cos(x)dx$$

Or :

$$\left[\frac{-\sin(x)}{n}e^{-nx}\right]_0^\pi = 0 \quad (\text{car } \sin(0) = \sin(\pi) = 0)$$

Donc :

$$I_n = \frac{1}{n}J_n \quad (\text{première relation à établir})$$

<u>Deuxième intégration par parties :</u>

- $u = e^{-nx}, \quad u' = -ne^{-nx}$
- $v' = \sin(x), \quad v = -\cos(x)$

Alors :

$$I_n = [-e^{-nx}\cos(x)]_0^\pi + n\int_0^\pi e^{-nx}\cos(x)dx$$

Calcul du premier terme :

$$-e^{-n\pi}\cos(\pi) + e^0\cos(0) = -e^{-n\pi}\cdot(-1) + 1\cdot 1 = e^{-n\pi} + 1$$

Donc :

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad (\text{deuxième relation à établir})$$

4.b. À partir des deux relations précédentes :

$$I_n = \frac{1}{n}J_n \quad \text{et} \quad I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n$$

Remplaçons J_n par nI_n dans la deuxième :

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - n(nI_n) \Rightarrow I_n + n^2 I_n = 1 + e^{-n\pi} \Rightarrow I_n(1 + n^2) = 1 + e^{-n\pi}$$

Donc :

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite déterminer le plus petit rang n tel que $I_n < 0{,}1$.

On utilise l'expression exacte de I_n dans le script Python :

```
from math import *

def seuil() :
    n = 0
    I = 2
    while I >= 0.1 :
        n = n + 1
        I = (1 + exp(-n * pi)) / (n * n + 1)
    return n
```

Pour accéder à d'autres sujets et corrigés de spé mathématiques au baccalauréat :
www.sujetdebac.fr/annales/specialites/spe-mathematiques/