Baccalauréat S

Session 2019 Liban - Mathématiques spécialité

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau et complété par www.sujetdebac.fr. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : `tharbreteau@protonmail.com`.

Exercice n° 1 *Commun à tous les candidats*

1. a. Notons les fonctions $u : x \mapsto x$, $v : x \mapsto x^2$ et $w : x \mapsto 1 - \ln(x)$, définies et dérivables sur $]0,1]$. Par opérations, f est dérivable sur $]0,1]$ et comme $f = u \times v \circ w$, par règle de dérivation d'un produit,

$$f' = u' \times v \circ w + u \times (v \circ w)'.$$

Par règle de dérivation d'une composée de fonctions,

$$f' = u' \times v \circ w + u \times w' \times v' \circ w,$$

d'où

$$\forall x \in]0,1], \quad f'(x) = (1 - \ln x)^2 + \left(-\frac{1}{x}\right) \times 2x(1 - \ln x) = (1 - \ln x)(1 - \ln x - 2) = (\ln x - 1)(\ln x + 1).$$

b. Le signe de f' sur $]0,1]$ dépend des signes des fonctions $x \mapsto \ln x + 1$ et $x \mapsto \ln x - 1$. Soit $x \in]0,1]$,

$$\ln x + 1 > 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x \geq \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \ln x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{e}$$

et

$$\ln x - 1 \geq 0 \iff \ln x \geq 1 \iff x \geq e > 1 \quad \text{et} \quad \ln x - 1 = 0 \iff x = e.$$

L'énoncé admet que f a une limite nulle en 0, d'où le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$\ln x - 1$	‖	$-$		$-$	
$\ln x + 1$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	1

2. a. Sur la figure de l'énoncé, on mesure à la règle les distances $ON_{0,2}$ et $OP_{0,2}$, respectivement égales à $5,1$cm et $4,7$cm. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ est donc égale à $(5,1 \times 4,7)/2 \simeq 12,0\text{cm}^2$. De plus, une unité d'aire correspond sur la figure à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ, donc est égale $9,7 \times 1,8 = 17,5\text{cm}^2$. On en déduit que $\mathcal{A} = (5,1 \times 4,7)/(2 \times 9,7 \times 1,8) \simeq 6,9 \times 10^{-1}$ unités d'aire.

b. L'équation de la droite $d_{0,2}$ est de la forme $y = ax + b$, où a et b sont des réels à déterminer. Cette droite étant la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $0,2$, g étant dérivable en $0,2$, par définition du nombre dérivé, $a = g'(0,2)$. De plus, le point $M_{0,2}$ a pour abscisse $0,2$ et appartient à Γ, donc son ordonnée est égale à $g(0,2)$. Comme ce point appartient également à $d_{0,2}$, b vérifie

$$g(0,2) = g'(0,2) \times 0,2 + b$$

donc $b = g(0,2) - g'(0,2) \times 0,2$ et on en déduit que

$$d_{0,2} : y = g'(0,2)(x - 0,2) + g(0,2).$$

Par définition de g,

$$d_{0,2} : y = \frac{1}{0,2}(x - 0,2) + \ln(0,2) = 5x - 1 + \ln(0,2).$$

c. Notons $\mathcal{A}$ l'aire recherchée. Par définition de l'aire d'un triangle, $\mathcal{A} = (ON_{0,2} \times OP_{0,2})/2$. Notons y_P l'ordonnée de $P_{0,2}$, de coordonnées $(0, y_P)$, ainsi que x_N l'abscisse de $N_{0,2}$, de coordonnées $(x_N, 0)$. Ces points appartenant à $d_{0,2}$, l'équation de droite établie en **2.b** montre que

$$\begin{cases} y_P = \dfrac{1}{0,2}(0 - 0,2) + \ln(0,2) \\ 0 = \dfrac{1}{0,2}(x_N - 0,2) + \ln(0,2) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} y_P = \ln(0,2) - \dfrac{1}{0,2} \times 0,2 = \ln(0,2) - 1 \\ x_N = 0,2 - 0,2\ln(0,2) = 0,2(1 - \ln(0,2)). \end{cases}$$

On en déduit que $ON_{0,2} = |0,2(1 - \ln(0,2))| = 0,2(1 - \ln(0,2))$ et que $OP_{0,2} = |\ln(0,2) - 1| = 1 - \ln(0,2)$, d'où

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}0,2(1 - \ln(0,2))^2 \simeq 6,8 \times 10^{-1}\text{unités d'aire.}$$

3. Remarquons que $\mathcal{A} = f/2$. Le tableau de variations de f établi en **1.b** montre que f atteint un maximum sur $]0,1]$ en un unique point $a = 1/e$, et que ce maximum vaut $4/e$. On en déduit que $\mathcal{A}$ atteint sur $]0,1]$ un maximum en $a = 1/e$ uniquement, et que ce maximum vaut $2/e$.

Exercice n° 2 *Commun à tous les candidats*

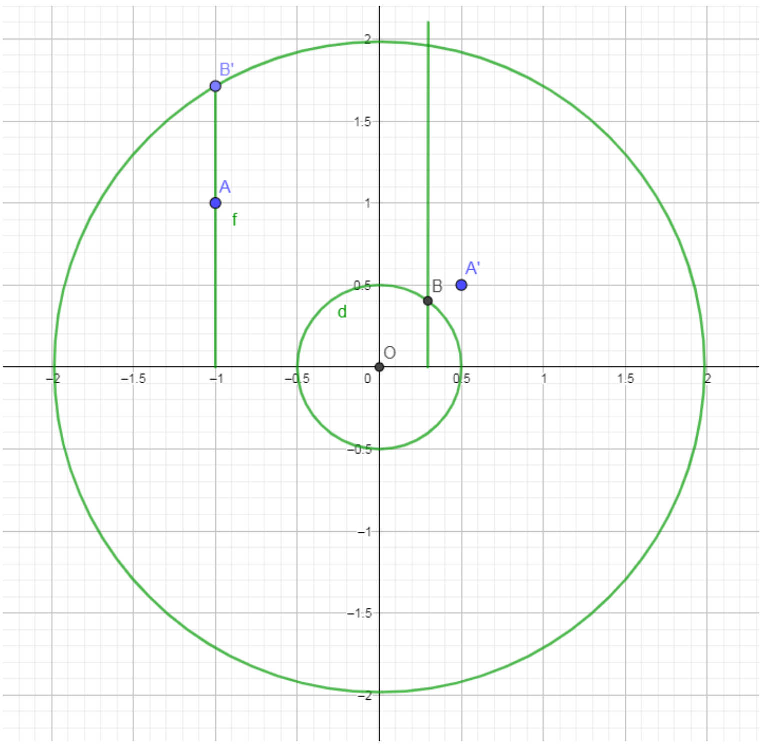
1. a. Notons $z_{A'}$ l'affixe de A',

$$z_{A'} = f(z_A) = -\frac{1}{-1+\mathrm{i}} = -\frac{-1-\mathrm{i}}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

b. Notons $z_{B'}$ l'affixe de B',

$$z_{B'} = f(z_B) = -\frac{1}{\frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\pi/3}} = -2e^{-\mathrm{i}\pi/3} = 2e^{2\mathrm{i}\pi/3}.$$

c.



2. a. Notons $z' = f(z)$, comme $-1 = e^{\mathrm{i}\pi}$,

$$z' = -\frac{1}{re^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{r}\frac{e^{\mathrm{i}\pi}}{e^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{r}e^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}.$$

b. Notons $\mathcal{D}$ le disque du plan complexe de centre O et de rayon 1 privé du cercle de centre O et de rayon 1. C'est l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1. Soit M d'affixe $z \in \mathcal{D}$, notons $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$ ainsi que $z' = f(z)$ l'affixe de M', image de M par f. D'après **2.a**,

$$|z'| = \left|\frac{1}{r}e^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}\right| = \frac{1}{r}.$$

Mais $z \in \mathcal{D}$ donc $|z| = r < 1$, d'où $|z'| > 1$, ce qui montre que M' n'appartient pas à ce disque, donc que M' est bien à l'extérieur de ce disque. L'affirmation est donc vraie.

3. a. Soit $z \in \mathbf{C}$, notons $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels.

$$z \in \Gamma \iff |z - z_K| = \frac{1}{2} \iff |z - z_K|^2 = \frac{1}{4} \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \iff x^2 + x + y^2 = 0.$$

b. Notons $z' = f(z)$,

$$z' = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x + \mathrm{i}y} = -\frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = -\frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

c. Notons $z \in \mathbf{C}$ l'affixe de M, ainsi que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels. Notons également $z' = f(z)$ l'affixe de M', d'après **3.b**, la partie réelle de z', c'est-à-dire l'abscisse de M', est égale à $-x/(x^2 + y^2)$. Comme $M \in \Gamma$, (x, y) vérifie l'équation cartésienne de Γ établie en **3.a**, d'où $x^2 + y^2 = -x$. Ceci montre que l'abscisse de M' est égale à 1, donc que M' appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice n° 3 *Commun à tous les candidats*

Partie A

1. Le triangle BAC est rectangle donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux. De plus, $(AC) \subset \mathcal{P}$ et d est orthogonale à $\mathcal{P}$ donc (AC) et d sont orthogonales. Ceci montre que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$, des vecteurs directeurs respectifs de (AC) et d, sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs orthogonaux, donc non colinéaires, de $\mathcal{P}$, donc est orthogonal à $\mathcal{P}$. Ce vecteur étant un vecteur directeur de (AC), (AC) et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux.

2. Le triangle BAC est rectangle en A, et comme (BD) est orthogonale à (BA) et à (BC), les triangles BDA et BDC sont rectangles en B. Enfin, d'après **1**, (AC) est orthogonale à (DA) donc DAC est rectangle en A. Ceci montre bien que $ABCD$ est un bicoin.

3. a. Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles définis en **2** montre que

- DC est plus grand que DB et BC,
- BC est plus grand que BA et AC,
- DC est plus grand que DA et AC.

Ceci montre que DC est plus grand que DA, AC, DB, BC et donc que AC, ce qui en fait bien la plus grande arrête de $ABCD$.

b. Dans un triangle rectangle, la longueur de la médiane est égale à la moitié de celle de l'hypothénuse, donc $DI = IC = AI$ et $DI = IC = BI$. Le point I est bien équidistant des quatres sommets de $ABCD$.

Partie B

1. On déduit de la représentation paramétrique de d que $(2; -2; 1)$ est un vecteur directeur de d ainsi qu'un vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc l'équation paramétrique de $\mathcal{P}$ est de la forme :

$$2x - 2y + z + a = 0$$

où a est un réel. Comme $A(3; 1; -5) \in \mathcal{P}$, $2 \times 3 - 2 \times 1 + (-5) + a = 0$, d'où $a = 1$. On en déduit que $2x - 2y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

2. Notons B le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de d, $B \in d$ donc il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que les coordonnées de B soient $(2t + 1; -2t + 9; t - 3)$, et $B \in \mathcal{P}$, donc ses coordonnées vérifient l'équation établie en **1**. On a donc $2(2t + 1) - 2(-2t + 9) + t - 3 + 1 = 0$, soit $9t - 18 = 0$, d'où $t = 2$. Les coordonnées de B sont bien $(5; 5; -1)$.

3. Comme $2 \times 7 - 2 \times 3 + (-9) + 1 = 0$, le point C de coordonnées $(7; 3; -9)$ vérifie l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ établie en **1**, donc $C \in \mathcal{P}$. De plus,

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 3; 5 - 1; -1 - (-5)) = (2; 4; 4), \quad \overrightarrow{AC} = (7 - 3; 3 - 1; -9 - (-5)) = (4; 2; -4)$$

donc $AB = AC$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 2 + 2 \times 4 - 4 \times 4 = 0$, d'où les droites (AC) et (AB) sont orthogonales. Le triangle ABC est bien rectangle et isocèle en A.

4. a. La droite (AB) est incluse dans $\mathcal{P}$ et d est orthogonale à $\mathcal{P}$. Comme B et M appartiennent à d, (BM) et (AB) sont orthogonales donc ABM est un triangle rectangle en B.

b. On a montré en **3** que $\overrightarrow{AB}(2;4;4)$ donc $AB^2 = 2^2+4^2+4^2 = 36$ et

$$BM^2 = (2t+1-5)^2 + (-2t+9-5)^2 + (t-3-(-1))^2 = 9t^2-36t+36,$$

d'où $BM = AB \iff BM^2 = AB^2 \iff 9t^2-36t = 0 \iff t^2-4t = 0$. Le triangle ABM est donc isocèle en B si et seulement si $t^2-4t=0$.

c. D'après **4.b**, un point M de d de paramètre $t \in \mathbf{R}$ est tel que ABM est isocèle si et seulement si $t^2-4t = t(t-4) = 0$, donc si et seulement si $t \in \{0,4\}$. On en déduit que seul les points de d de paramètre 0 et 4, donc de coordonnées respectives $(1;9;-3)$ et $(9;1;1)$ vérifient les conditions de l'énoncé.

Partie C

D'après **Partie B, 3**, $C \in \mathcal{P}$ et le triangle ABC est rectangle en A, donc il est inclus dans le plan $\mathcal{P}$ défini en **Partie B**. De plus, la droite d définie en **Partie B** est orthogonale à $\mathcal{P}$ et passe par définition par le point B. Enfin, le point D est par définition un point de d, distinct de B. D'après **Partie A, 3.b**, en notant I le milieu de $[CD]$, I est équidistant de A, B, C et D. Ces quatre points sont donc sur la sphère de centre I et de rayon $R = CD/2$. Les coordonnées de I sont $((7+9)/2;(3+1)/2;(-9+1)/2) = (8;2;-4)$ et $R = \sqrt{(9-7)^2+(1-3)^2+(1-(-9))^2}/2 = \sqrt{108}/2 = \sqrt{108/4} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Exercice n° 4 *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité*

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, à l'heure $n+1$, la moitié du bassin A $(0,5a_n)$ va se vider, les trois quarts du bassin B $(0,75b_n)$ vont entrer dans le bassin A et 200 litres vont être rajoutés dans le bassin A, d'où

$$a_{n+1} = a_n - 0,5a_n + 0,75b_n + 2 = 0,5a_n + 0,75b_n + 2.$$

En revanche, les trois quarts du bassin B vont quitter ce bassin et ce seront 300 litres qui lui seront rajoutés, d'où

$$b_{n+1} = b_n - 0,75b_n + 3 = 0,25b_n + 3.$$

Par produit matriciel, on obtient bien la relation $U_{n+1} = MU_n + C$.

2. a. Par produit matriciel,

$$P^2 = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I_2.$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse P.

b. Par produit matriciel,

$$PMP = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,5 & 0,75\\0 & 0,25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,5 & 0,75\\0 & -0,25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,5 & 0\\0 & 0,25\end{pmatrix}.$$

En notant $D = PMP$, D est bien une matrice diagonale.

c. D'après **2.b**, $D = PMP$ donc $PDP = P(PMP)P = P^2MP^2$. D'après **2.a**, $P^2 = I_2$, donc $PDP = M$.

d. Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$, (H_n) : $M^n = PD^nP$.

- Initialisation : $M^0 = I_2$ et $PD^0P = PI_2P = P^2 = I_2$ d'après **2.a**, donc (H_0) est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que (H_n) soit vraie, alors $M^n = PD^nP$, donc $M^{n+1} = PD^nPM$. Mais d'après **2.c**, $PDP = M$, d'où $M^{n+1} = PD^nPPDP = PD^nDP = PD^{n+1}P$ (car d'après **2.a**, $P^2 = I_2$). L'hypothèse (H_{n+1}) est donc vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbf{N}, \quad M^n = PD^nP$.

3. Par produit matriciel,

$$MX + C = \begin{pmatrix}0,5 & 0,75\\0 & 0,25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix} = X.$$

4. **a**. D'après **1** et **3**,

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, \quad U_{n+1} = MU_n + C \\ X = MX + C, \end{cases}$$

donc en soustrayant la deuxième ligne à la première, on trouve que : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad V_{n+1} = MV_n$.

b. *Remarque : La relation admise est aussi vraie pour $n = 0$.*
Soit $n \in \mathbf{N}$, par produit matriciel et d'après les résultats admis sur V_n et M^n,

$$V_n = M^n V_0 = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n \\ -3 \times 0,25^n \end{pmatrix}.$$

Par définition de V_n,

$$U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}.$$

5. **a**. Par définition de (U_n),

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad b_n = -3 \times 0,25^n + 4.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$, $b_{n+1} - b_n = -3 \times 0,25^{n+1} - (-3 \times 0,25^n) = 3 \times 0,25^n(1 - 0,25) = 3 \times 0,25^n \times 0,75 \geq 0$ donc $b_{n+1} \geq b_n$. La suite (b_n) est donc croissante, et comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-3 \times 0,25^n \leq 0$, $b_n \leq 4$. La suite (b_n) est donc majorée, et elle est croissante, donc elle converge. La suite $(0,25^n)$ étant une suite géométrique de raison $0,25$, strictement comprise entre -1 et 1, sa limite est nulle. On en déduit que la limite de (b_n) est 4.

b. Par définition de (U_n),

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10,$$

et par les mêmes arguments que lors du calcul de la limite de (b_n) en **5.a**, on trouve que la limite de (a_n) est 10.

c. D'après **5.a**, (b_n) est croissante et convergente, donc est majorée par sa limite, qui est 4. De même, il est admis que (a_n) est croissante, comme elle converge d'après **5.b**, elle est majorée par sa limite, qui est 10. Pour éviter tout débordement, il faut donc que le bassin A puisse contenir au moins 1000 litres, et le bassin B au moins 400 litres.