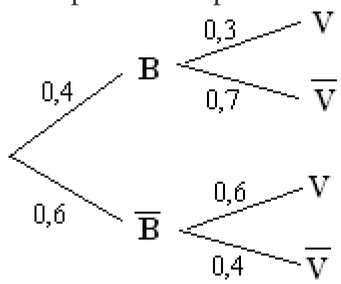
Correction Bac ES – Pondichéry – avril 2010

Exercice 1 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

1) a. On peut représenter la situation par l'arbre pondéré suivant :



b. On a : $p(\overline{B} \cap \overline{V}) = p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(\overline{V}) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$.
Ainsi, lors des journées « rouges », 24 % des automobilistes ne quittent pas l'autoroute entre Paris et Marseille.

c. $p(\overline{V}) = p(B \cap \overline{V}) + p(\overline{B} \cap \overline{V}) = 0{,}4 \times 0{,}7 + 0{,}24 = 0{,}52$.
Donc, la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la route départementale entre Valence et Marseille est égale à 0,52.

2) a. • Paris-Marseille par autoroute en passant par Lyon : 14 heures (4 + 5 + 5).
• Paris-Valence par autoroute en passant par Lyon, puis Valence-Marseille par départementale : 12 heures (4 + 5 + 3).
• Paris-Beaune, puis Beaune-Valence par itinéraire de délestage et Valence-Marseille par autoroute : 13 heures (4 + 4 + 5).
• Paris-Beaune, puis Beaune-Valence par itinéraire de délestage et Valence-Marseille par départementale : 11 heures (4 + 4 + 3).

On a ainsi :

Temps en heures	11	12	13	14
Probabilité	$p(B \cap V) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$	$p(\overline{B} \cap V) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$	$p(B \cap \overline{V}) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$	0,24

b. L'espérance de cette loi est : $E = 11 \times 0{,}12 + 12 \times 0{,}36 + 13 \times 0{,}28 + 14 \times 0{,}24 = 12{,}64$.
Ainsi, en moyenne, le trajet Paris-Marseille, lors des journées « rouges », est de 12,64 heures.

Exercice 2 (*5 points*)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1) Une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés est :
$$y = 2{,}45x + 69{,}3.$$

2) L'année 1993 a pour rang $x = 8$ et $2{,}45\times 8 + 69{,}3 = 88{,}9$.
Donc, avec cet ajustement, on pourrait prévoir 88,9 millions d'habitants en 1993, en Allemagne réunifiée.
Or, $\dfrac{88{,}9}{81} = 1{,}0975$ à 10^{-3} près. Ainsi, cet ajustement surestime la population de 9,75 %.
Donc, cet ajustement ne semble pas adapté sur le long terme.

Partie B

1) On obtient le tableau suivant :

Année	1958	1963	1968	1973	1993	1998	2003	2008
Rang de l'année x_i $0 \leqslant i \leqslant 11$	1	2	3	4	8	9	10	11
$z_i = e^{\frac{y_i}{100}}$ (arrondi au centième) $0 \leqslant i \leqslant 11$	2,04	2,10	2,16	2,20	2,25	2,27	2,28	2,28

2) Une équation de la droite d'ajustement affine de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés est :
$$z = 0{,}02x + 2{,}07.$$

3) On a : $z = e^{\frac{y}{100}}$ et $z = 0{,}02x + 2{,}07$ donc, $e^{\frac{y}{100}} = 0{,}02x + 2{,}07 \Leftrightarrow \dfrac{y}{100} = \ln(0{,}02x + 2{,}07)$
$$\Leftrightarrow y = 100\ln(0{,}02x + 2{,}07).$$

4) L'année 2013 a pour rang $x = 12$ et $100\ln(0{,}02\times 12 + 2{,}07) = 83{,}7$ à 10^{-1} près.
Donc, avec cet ajustement, on peut estimer que l'Allemagne comptera 83,7 millions d'habitants en 2013.

Exercice 2 (*5 points*)

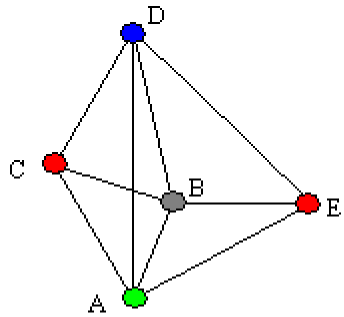
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie *A*

1) Le sous-graphe ABCD est complet d'ordre 4.

2) Notons Γ le nombre chromatique de ce graphe.
Ce graphe contient un sous-graphe complet d'ordre 4 donc, $\Gamma \geqslant 4$.
Par ailleurs, on sait que le nombre chromatique est inférieur ou égal au plus haut degré augmenté de 1.
Or, ici le plus haut degré est 4. Donc, $\Gamma \leqslant 4 + 1$ soit $\Gamma \leqslant 5$.
Finalement, le nombre chromatique Γ est tel que : $4 \leqslant \Gamma \leqslant 5$.

3) Pour colorer ce graphe, on attribue à chacun des sommets du sous-graphe complet ABCD une couleur différente. Comme les sommets C et E ne sont pas adjacents, on leur attribue la même couleur.



4) D'après la question 2, le nombre chromatique est supérieur ou égal à 4.
D'après la question 3, on a trouvé une coloration utilisant exactement 4 couleurs.
Donc, le nombre chromatique de ce graphe est $\Gamma = 4$.

Partie *B*

1) La chaîne A-B-C-D-E passe par tous les sommets du graphe, donc ce graphe est connexe.

   Les sommets C et E ne sont pas adjacents et donc, ce graphe n'est pas complet.

2) Ce graphe possède exactement deux sommets de degré impair (C et E). Donc, il existe au moins une chaîne eulérienne partant d'un des sommets de degré impair et arrivant à l'autre sommet de degré impair.

3) Les deux sommets sont de degré impair et ne sont pas adjacents. Si on rajoute l'arête C-E, tous les sommets seront de degré pair.
Ainsi, en rajoutant l'arête C-E, le graphe obtenu possèdera un cycle eulérien.

Partie *C*

1) Le nombre chromatique du graphe est 4, donc 4 couleurs différentes suffisent.

2) D'après la question B2, on sait qu'il existe au moins une chaîne eulérienne partant du sommet de degré impair C et arrivant au sommet de degré impair E.
Par exemple : C-D-A-C-B-A-E-B-D-E.

3) D'après la question B3, il suffit de rajouter la rampe C-E pour obtenir un cycle eulérien.

Exercice 3 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction A définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par $A(x)=\dfrac{4}{1-e^{-0,039x}}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-0,039x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ donc par composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,039x}=0$.
   Ainsi, par somme, puis par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=4$.

2) On a : $A(x)=4\times\dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=1-e^{-0,039x}$ donc, $\dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u'(x)=0,039\,e^{-0,039x}$.
   Ainsi, $A'(x)=4\times\dfrac{-0,039e^{-0,039x}}{\left(1-e^{-0,039x}\right)^2}=\dfrac{-0,156e^{-0,039x}}{\left(1-e^{-0,039x}\right)^2}$

3) Pour tout $x\in[1\,;+\infty[$, $e^{-0,039x}>0$ et $\left(1-e^{-0,039x}\right)^2>0$ donc, $A'(x)$ a le même signe que $-0,156$.
   Donc, $A'(x)<0$ pour tout $x\in[1\,;+\infty[$.
   On a donc le tableau de variation suivant, où $A(1)=\dfrac{4}{1-e^{-0,039}}$

x	1 $\qquad$ $+\infty$
signe de $A'(x)$	$-$
A	$A(1)$ $\searrow$ 4

Partie B

1) $A(1)=\dfrac{4}{1-e^{-0,039}}=104,577$ à 10^{-3} près.
   Donc, sur un prêt d'un an, on rembourse 104 577 € à la banque.

   $A(10)=\dfrac{4}{1-e^{-0,039\times10}}=12,386$ à 10^{-3} près.
   Donc, sur un prêt de 10 ans, on rembourse 12 386 € par an.

   $A(20)=\dfrac{4}{1-e^{-0,039\times20}}=7,386$ à 10^{-3} près.
   Donc, sur un prêt de 20 ans, on rembourse 7 386 € par an.

2) Le montant des intérêts payés à la banque correspond à la différence entre le montant total payé à la banque et la somme empruntée.
   Pour un emprunt de n années, les annuités sont de $A(n)$ milliers d'€, donc le montant total payé à la banque sera de : $n\times A(n)$ milliers d'€.
   Comme le montant de l'emprunt est de 100 milliers d'€, on a :
$$I(n)=n\times A(n)-100=\frac{4n}{1-e^{-0,039\,n}}-100$$

3) On a le tableau suivant :

Durée de l'emprunt n	10 ans	15 ans	20 ans
Montant d'une annuité $A(n)$	12,386	9,032	7,386
Montant $S(n)$ des n annuités payées à la banque	123,86	135,48	147,72
Intérêts $I(n)$ versés à la banque	23,86	35,48	47,72

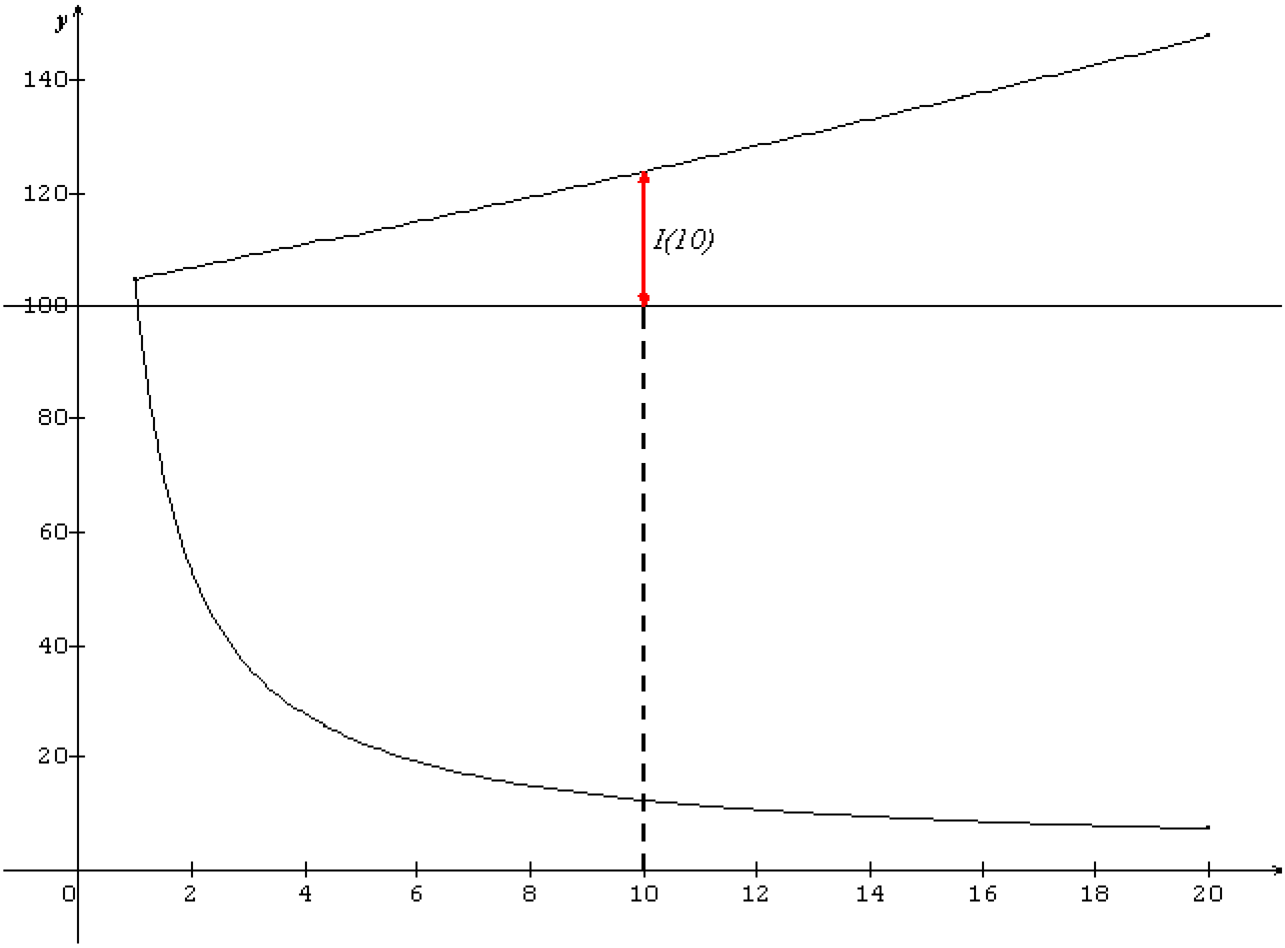
4) Pour faciliter l'étude des valeurs de $A(n)$, $S(n)$ et $I(n)$, on utilise les fonctions A, S et I définies sur $[1 ; 20]$ par

$$A(x) = \frac{4}{1 - e^{-0,039x}} \quad ; \quad S(x) = \frac{4x}{1 - e^{-0,039x}} \quad ; \quad I(x) = \frac{4x}{1 - e^{-0,039x}} - 100.$$

On a représenté respectivement en ANNEXE 1 ci-après les fonctions A et S par les courbes $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_S$ sur l'intervalle $[1 ; 20]$.

a. On a : $I(10) = S(10) - 100$.
Ainsi, $I(10)$ représente la distance entre la courbe $\mathscr{C}_S$ et la droite d'équation $y = 100$ pour $x = 10$.

b. Graphiquement, $I(n)$ correspond à la distance entre la courbe $\mathscr{C}_S$ et la droite d'équation $y = 100$ pour $x = n$.
On voit que plus x est grand, plus l'écart entre $\mathscr{C}_S$ et la droite $y = 100$ est grand.
Donc, la fonction I est croissante.



Exercice 4 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

Partie A : Etude graphique

La fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$ a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f_2(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc sa primitive aura pour tableau de variation :

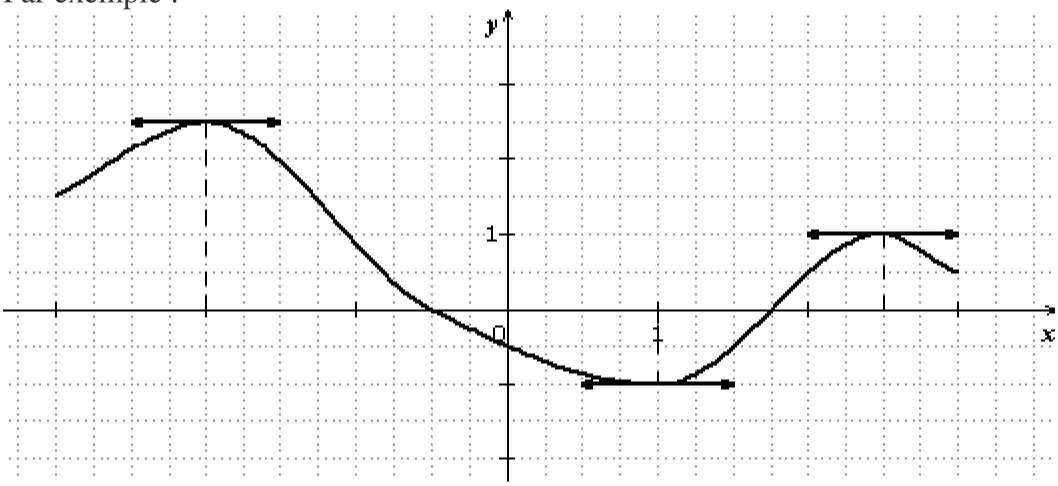
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
F_2		↗		↘		↗	

Ce tableau correspond à la courbe représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$.

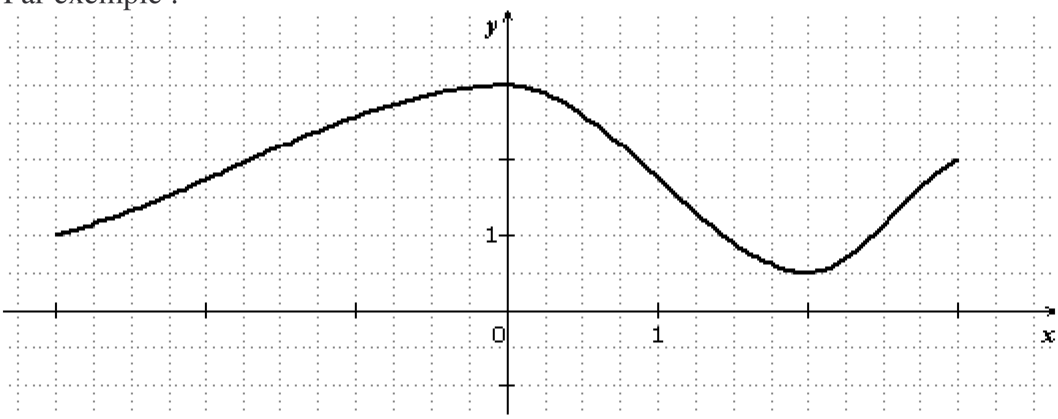
Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_1$ représente la fonction f et la courbe $\mathscr{C}_2$ représente sa fonction dérivée f'.

Partie B : Constructions

a. La fonction g est dérivable donc elle est continue et sa courbe est « régulière ».
De plus, l'équation $g'(x) = 0$ admet trois solutions, donc sa courbe représentative admet trois tangentes parallèles à l'axe des abscisses.
Par exemple :



b. La fonction ln étant strictement croissante, les fonctions h et ln o h ont les même variations partout où la fonction h est strictement positive.
Ainsi, on doit tracer une fonction h, positive (courbe au-dessus de l'axe des abscisses) ayant les mêmes variations que la fonction ln o h.
Par exemple :



c. Si la fonction k est continue et positive sur [1 ; 3], l'intégrale $\int_1^3 k(x)\,dx$ représente l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_k$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
Ainsi, on doit tracer une courbe dont l'aire sous la courbe sur l'intervalle [1 ; 3] est plus grande que 4 unités d'aire et plus petite que 6 unités d'aire.
Par exemple :