BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

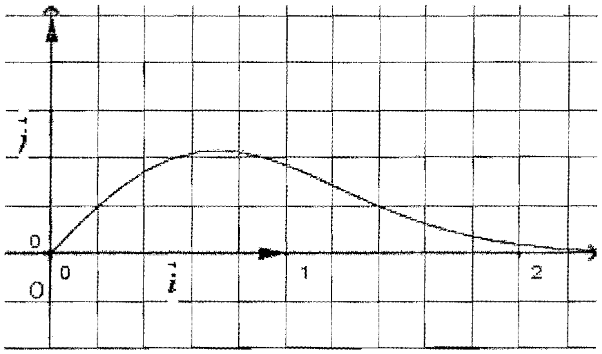
Exercice 1 (*7 points*)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. *a.* Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x)=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$).

b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=a$. Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. *a.* Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1,

$$f(n+1)\leqslant u_n\leqslant f(n)$$

b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. *a.* Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u_k$.

b. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,4999382951	0,4999999437	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.

Exercice 2 (*5 points*)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - \mathrm{i},\ b = 1 - 3\mathrm{i} \text{ et } c = -1 - \mathrm{i}.$$

1. *a.* Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.
   b. En déduire une expression de n en fonction de m.
3. On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q son affixe.
   Montrer que : $q = \frac{(1-\mathrm{i})m}{2} + 2 + \mathrm{i}$
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.
   a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
   b. Calculer $|q - 2 - \mathrm{i}|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

Exercice 3 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère les points :

A de coordonnées $(1,1,0)$, B de coordonnées $(2,0,3)$, C de coordonnées $(0,-2,5)$ et D de coordonnées $(1,-5,5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x,y,z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées $(3,3,0)$ et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   b. Quelle est son espérance ?
   c. Calculer $P(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
On considère les événements D et A suivants :
   - D : « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - A : « obtenir exactement deux 6 ».

   a. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
   - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

   (On pourra construire un arbre de probabilité).

   b. En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.

   c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
On note B_n l'événement «obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

   a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'événement B_n.

   b. Calculer la limite de la suite (p_n). Commenter ce résultat.