BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice constitue un questionnaire à choix multiples. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Barème : Une réponse juste rapporte 0,5 point, une réponse fausse enlève 0,25 point, l'absence de réponse n'enlève et ne rapporte aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.

1) Le prix d'un article subit une première augmentation de 20 % puis une seconde augmentation de 30 %. Le prix de l'article a augmenté globalement de :

a) 25 % **b)** 50 % **c)** 56 %

2) Le nombre réel $\dfrac{\ln e}{\ln(e^2)}$ est égal à :

a) $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$ **b)** $\dfrac{1}{e}$ **c)** $\dfrac{1}{2}$

3) Le nombre réel $e^{-3\ln 2}$ est égal à

a) $\dfrac{1}{9}$ **b)** $\dfrac{1}{8}$ **c)** -8

4) Une primitive F de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = e^{-2x}$ est définie par :

a) $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}$ **b)** $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{-2x}$ **c)** $F(x) = -2e^{-2x}$

5) Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est :

a) $y = x+1$ **b)** $y = e\,x$ **c)** $y = e^x$

6) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x - 1}$. La fonction f est définie sur :

a) **R** **b)** $]-\infty\,;0\,[\cup]0\,;+\infty[$ **c)** $]-1\,;+\infty[$

7) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{2x}$.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction f admet au voisinage de $+\infty$:

a) L'axe des abscisses comme asymptote horizontale

b) La droite d'équation $y = 2x$ comme asymptote oblique

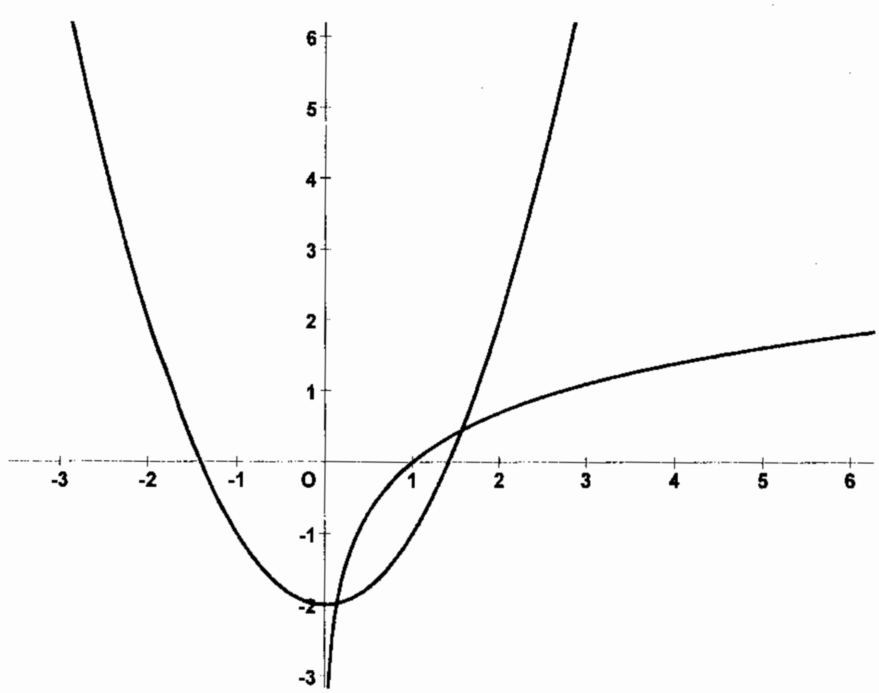
c) La droite d'équation $y = 2x - 1$ comme asymptote oblique

8) On considère la fonction logarithme népérien et la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^2 - 2$.
On donne ci-dessous les courbes représentatives de ces deux fonctions dans un repère orthogonal.
Dans **R**, l'équation $\ln x = x^2 - 2$ admet :

a) Une solution

b) Deux solutions de signes contraires

c) Deux solutions positives



EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Un pépiniériste a planté trois variétés de fleurs dans une prairie de quelques hectares : des violettes, des primevères et des marguerites. Il se demande s'il peut considérer que sa prairie contient autant de fleurs de chaque variété. Il cueille au hasard 500 fleurs et obtient les résultats suivants :

Variétés	Violettes	Primevères	Marguerites
Effectifs	179	133	188

1) Calculer les fréquences f_V d'une fleur de variété Violette, f_P d'une fleur de variété Primevère et f_M d'une fleur de variété Marguerite. On donnera les valeurs décimales exactes.

2) On note $d_{obs}^2 = \left(f_V - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_P - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_M - \frac{1}{3}\right)^2$.

Calculer $500d_{obs}^2$. On donnera une valeur approchée arrondie au millième.

3) Le Pépiniériste, ne voulant pas compter les quelques milliards de fleurs de sa prairie, opère sur ordinateur en simulant le comptage, au hasard, de 500 fleurs suivant la loi équirépartie. Il répète 2000 fois l'opération et calcule à chaque fois la valeur de $500d_{obs}^2$. Ses résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Intervalle auquel appartient $500d_{obs}^2$	$[0;0,5[$	$[0,5;1[$	$[1;1,5[$	$[1,5;2[$	$[2;2,5[$	$[2,5;3[$	$[3;3,5[$	$[3,5;4[$	$[4;4,5[$	$[4,5;5[$
Nombre par intervalle	163	439	458	350	231	161	80	47	37	34

Par exemple : le nombre $500d_{obs}^2$ apparaît 163 fois dans l'intervalle [0 ; 0,5[.

On note D_9 le neuvième décile de cette série statistique.

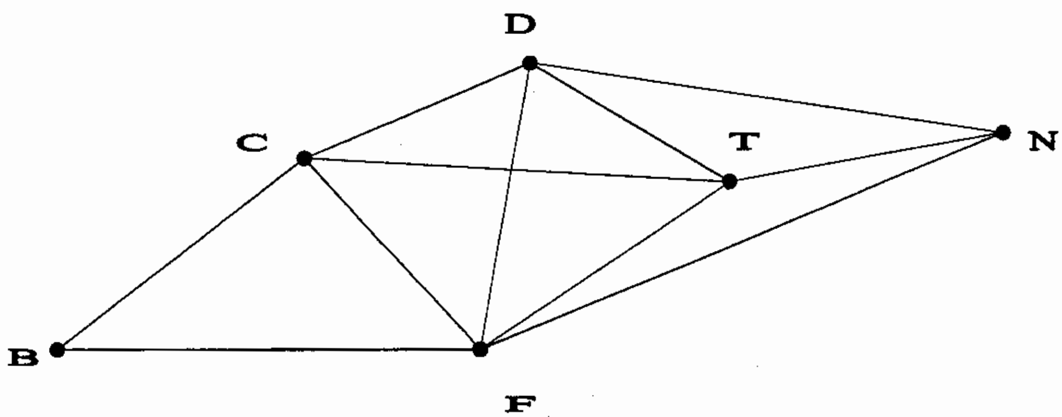
Montrer que $D_9 \in [2,5 ; 3[$.

4) En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer avec un risque inférieur à 10 % que « la prairie est composée d'autant de fleurs de chaque variété ».

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes.
On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



1) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

b) Justifier que le graphe est connexe.

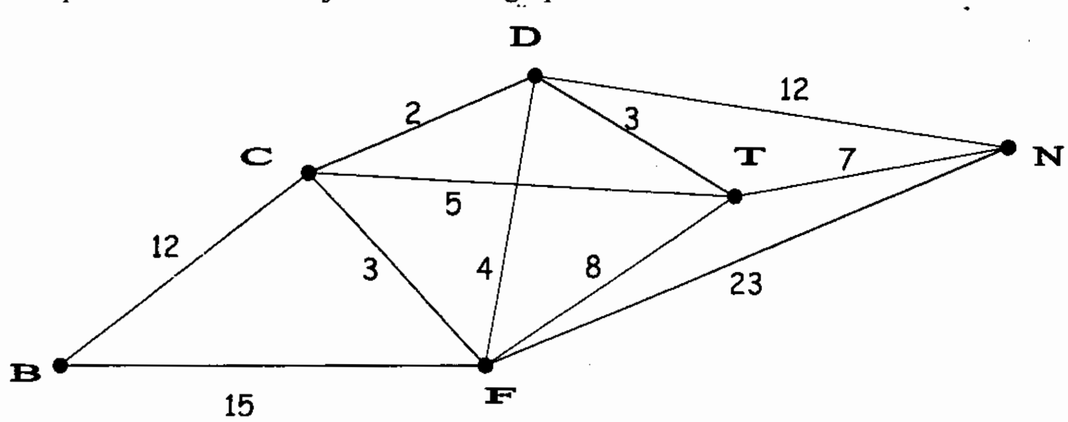
2) Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin.
Démontrer que leur souhait est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.

3) Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.

a) Montrer que $4 \leqslant n \leqslant 6$

b) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

4) Le groupe se trouve au sommet B et souhaite se rendre au sommet N. Les distances en kilomètres entre chaque sommet ont été ajoutées sur le graphe.



Indiquer une chaîne qui minimise la distance du trajet. Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **(7 points)**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes. Le candidat pourra utiliser les résultats préliminaires dans la partie A, même s'il ne les a pas établis.

Préliminaires

On admet les éléments du tableau de signes ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\frac{6}{x}-6x^2$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=6\ln x-2x^3-3$. On désigne par g' la fonction dérivée de g.

1) Calculer $g'(x)$.

2) En utilisant **1)**, déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On ne demande pas les limites dans cette question.

3) En déduire que $g(x)<0$ pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=x+\frac{3\ln x}{2x^2}$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

2) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Montrer que, pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=-\frac{g(x)}{2x^3}$.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

1) On définit la fonction F sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}\times\frac{1+\ln x}{x}$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f notée C_f.
On a colorié le domaine limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Donner la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire de ce domaine, puis une valeur approchée arrondie au centième.