BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2008

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré sera mis à la disposition des candidats.

Le sujet comporte deux annexes à remettre avec la copie.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

f est une fonction définie sur $]-2\ ;+\infty[$ par :

$$f(x)=3+\frac{1}{x+2}$$

On note f' sa fonction dérivée et (C) la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la bonne réponse sur l'annexe 1 à remettre avec la copie.
Aucune justification n'est demandée.
Barème : Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

COMPLETER LE DOCUMENT REPONSE EN ANNEXE.

1. $f(x)=\dfrac{3x+6}{x+2}$.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
2. La courbe (C) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3,5.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
3. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=3$	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
4. $\int_0^2 f(x)dx=6+\ln 2$.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
5. La droite d'équation $y=3$ est asymptote à (C).	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
6. $f(x)>3$ pour tout x de $]-2\ ,+\infty[$.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
7. $f'(-1)=-1$.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
8. La fonction g définie sur $]-2\ ;+\infty[$ par $g(x)=\ln[f(x)]$ est décroissante.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I (calculs exacts demandés)

Sur une route, deux intersections successives "a" et "b" sont munies de feux tricolores. On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et fonctionnent de manière indépendante. On admet que :

La probabilité que le feu de "a" soit vert est égale à $\frac{3}{4}$,

La probabilité que le feu de "b" soit vert est égale à $\frac{1}{2}$.

On note A l'événement : « le feu de "a" est vert », B l'événement « le feu de "b" est vert ».

Un automobiliste passe successivement aux deux intersections "a" et " b".

1) Calculer la probabilité qu'à son passage, les deux feux soient verts.

2) Calculer la probabilité qu'à son passage, il rencontre au moins un feu vert.

Partie II (résultats demandés à 10^{-2} près)

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :
À chaque intersection :

- Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.
- Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.
- Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n-ième intersection,
- O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange à la n-ième intersection,
- R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n-ième intersection,
- $P_n = [\ V_n\ \ O_n\ \ R_n\ ]$ la matrice traduisant l'état probabiliste du n-ième feu tricolore.

1) a) Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.

b) Donner la matrice de transition M complétée de ce graphe : $M = \begin{bmatrix} \dots & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & \dots & 0{,}1 \\ 0{,}45 & \dots & 0{,}5 \end{bmatrix}$

2) a) Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.

b) On donne $P_3 = [0{,}87\ \ 0{,}05\ \ 0{,}08]$. Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?

3) Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.

4) On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang n : $P_n = \left[0{,}85 \quad 0{,}05 \quad 0{,}10\right]$

Donner une interprétation concrète de ce résultat.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Historiquement, on avait décidé de numéroter les planètes du système solaire suivant leur distance moyenne au Soleil. Ainsi, on notait :

Mercure = 1
Vénus = 2
Terre = 3
Mars = 4
Céres = 5
Jupiter = 6
Saturne = 7
Uranus = 8

On considère la série statistique double $(i\ ;\ d_i)_{1 \leqslant i \leqslant 8}$, où i représente le numéro d'ordre de la planète et d_i, sa distance au soleil (en millions de km) :

(1 ; 57,94), (2 ; 108,27), (3 ; 149,60), (4 ; 228,06), (5 ; 396,44), (6 ; 778,73), (7 ; 1 427,7), (8 ; 2 872,4).

1) Indiquer, à l'aide d'une phrase, la signification du couple (3 ; 149,60).

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

2) Compléter, dans l'**annexe 1,** le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1 427,7	2 872,4
$d_i - d_1$	0			170,12				
$Y_i = \ln(d_i - d_1)$	/////////			5,137				

3) a) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement (D), de la série $(i\ ;\ y_i)$, avec i compris entre 1 et 8.

b) Construire le nuage de points $(i\ ;\ y_i)$, avec i compris entre 1 et 8, et la droite (D) dans un repère orthonormal, unités : 2 cm.

4) a) Déduire de ce qui précède que l'on peut modéliser l'expression de d_i, en fonction de i, avec i compris entre 1 et 8, sous la forme $d_i = 57{,}94 + 12{,}17 \times 1{,}966^i$.

b) Calculer la distance moyenne probable au soleil d'une planète numérotée 9.

(Ce résultat est connu sous le nom de <u>loi de Titius-Bode</u> du nom de deux astronomes allemands qui permirent la découverte de Neptune n°9 en 1848... La loi tomba ensuite en désuétude mais l'ajustement étudié demeure excellent si l'on inclut « Pluton »... La planète naine en n°10).

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Rappel : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' e^u$.

Un transporteur, s'occupant de voyages organisés, achète en l'an 2000 (instant initial $t = 0$), un autocar nécessitant un investissement initial de 200 milliers d'euros.

Partie A

Cet investissement se déprécie. Sa dépréciation cumulée, en milliers d'euros, à l'instant t, mesurée en années, est notée $D(t)$.
On pose $D(t) = 200\,(1 - e^{-0{,}086t})$ pour tout réel t de l'intervalle $I = [0\,;\,13]$.
L'**annexe 2** donne la courbe représentative de D dans le plan rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer graphiquement au cours de quelle année l'investissement aura perdu 60 % de sa valeur (faire apparaître sur le graphique les tracés qui permettent d'obtenir la réponse).

Partie B

Le transporteur veut revendre l'autocar. On note $V(t)$ la valeur de l'autocar l'année t, $0 < t < 13$.

1) Vérifier que $V(t) = 200 \times e^{-0{,}086t}$.

2) Etudier le sens de variation de V sur $[0\,;\,13]$.

3) Combien peut-on espérer revendre l'autocar au bout de 13 ans de service ? (au millier d'euros près).

4) Au cours de quelle année l'autocar a-t-il perdu la moitié de sa valeur ?

Partie C

On estime que les recettes nettes (en milliers d'euros) procurées par l'exploitation de cet autocar, hors dépréciation du véhicule, sont données à l'instant t réel de l'intervalle $[0\,;\,13]$ par :
$R(t) = 110\,(5 + t - 5e^{0{,}1t})$.

1) a) Calculer la dérivée R' de la fonction R ; étudier son signe sur $[0\,;\,13]$ et construire le tableau de variation de R.

b) En déduire que les recettes nettes sont maximales pour une valeur t_0 de t dont on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à l'unité près.

c) Construire la courbe représentative de la fonction R, dans le même repère que celle de D après avoir complété le tableau de valeurs de l'**annexe 2** où l'on arrondira $R(t)$ à l'entier le plus proche.

2) À tout instant, la différence $R(t) - D(t)$ représente l'exploitation $E(t)$ de l'autocar.
Compléter le tableau de l'**annexe 2**, utiliser le graphique ou les tableaux de valeurs de D, R et E pour répondre aux questions suivantes :

a) Au cours de quelle année l'exploitation de cet autocar est-elle la plus profitable ?

b) A partir de quelle année l'exploitation de cet autocar conduit-elle à un déficit ?

ANNEXE 1
(À remettre avec la copie)

EXERCICE 1

1. $f(x) = \dfrac{3x+6}{x+2}$.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
2. La courbe (C) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3,5.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
3. $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = 3$	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
4. $\int_0^2 f(x)dx = 6 + \ln 2$.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
5. La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à (C).	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
6. $f(x) > 3$ pour tout x de $]-2, +\infty[$.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
7. $f'(-1) = -1$.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**
8. La fonction g définie sur $]-2 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln[f(x)]$ est décroissante.	☐ **VRAI**	☐ **FAUX**

EXERCICE 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1 427,7	2 872,4
$d_i - d_1$	0			170,12				
$Y_i = \ln(d_i - d_1)$	/////////			5,137				

ANNEXE 2

(À remettre avec la copie)

EXERCICE 4

Représentation graphique

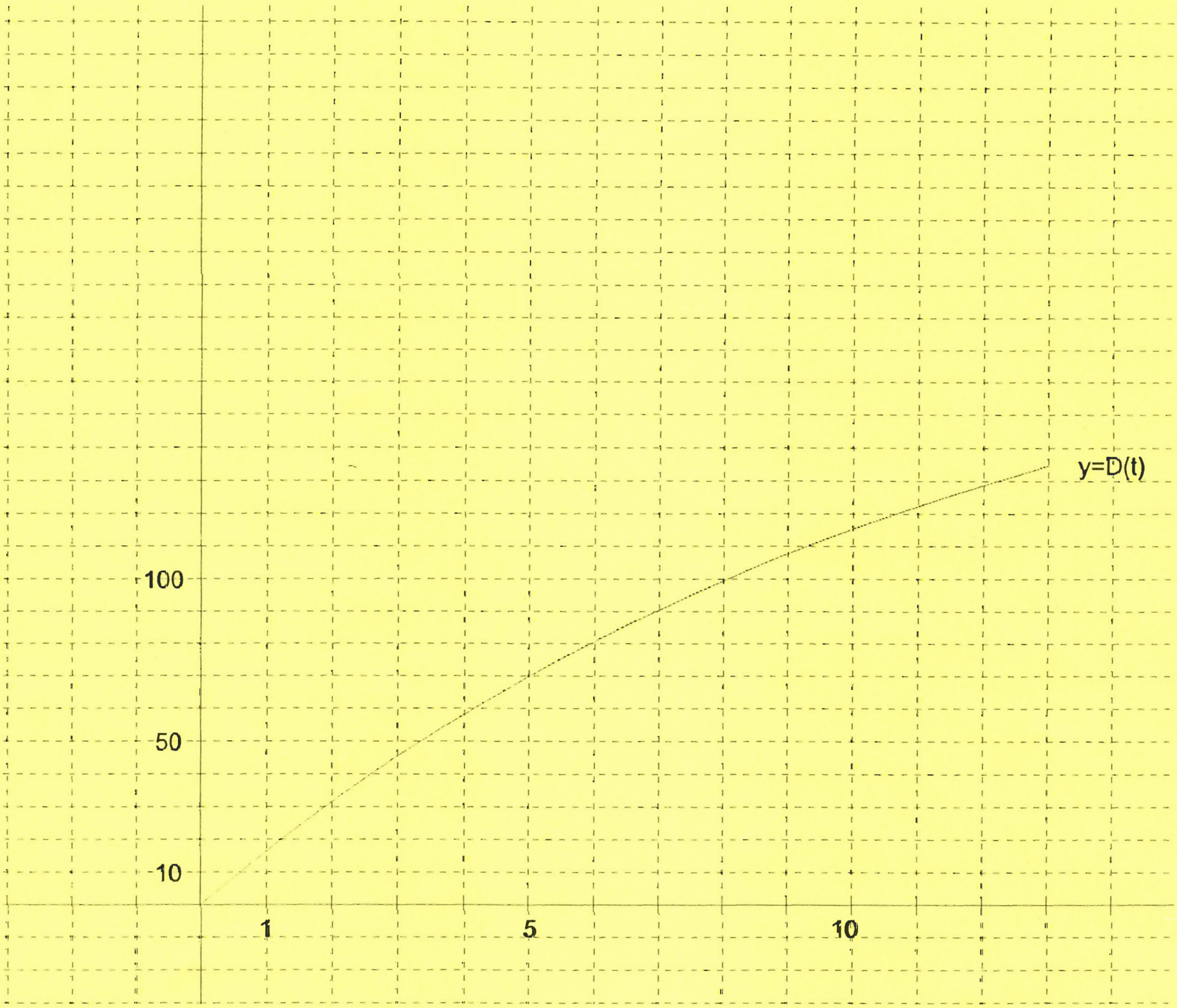

Tableau de valeurs

t	0	1	2	4	6	8	10	11	13
$D(t)$	0	16	32	58	81	99	115	122	135
$R(t)$	0	52	98		208				-38
$E(t)$	0				127				